TØI rapport 1314/2014

Harald Minken

Transportøkonomisk institutt
Stiftelsen Norsk senter for samferdselsforskning

Statisk trafikkteori og køprising

TØI rapport
1314/2014

Statisk trafikkteori og køprising

Harald Minken

ISSN 0808-1190
ISBN 978-82-480-1518-5 Elektronisk versjon

Oslo, mars 2014

Tittel: Statisk trafikkteori og køprising

Forfattere: Harald Minken

Dato: 04.2014

TØI rapport: 1314/2014

Sider 46

ISBN Elektronisk: 978-82-480-1518-5

ISSN 0808-1190

Finansieringskilde: Transportøkonomisk institutt

Prosjekt: 67 - Kompensasjon ØL

Kvalitetsansvarlig: Anne Madslien

Emneord: Køprising
Trafikkteori
Transportmodell

Sammendrag:

Denne rapporten er en del av kursmateriellet til et kurs i transportøkonomi som har vært holdt fra tid til annen for nyansatte på TØI.

Vi viser at vi kan se volume-delayfunksjoner som kombinasjonen av Littles formel med en antakelse om hvordan bilistene avpasser farten for å oppnå ønsket avstand til bilen foran. Deretter utleder vi regler for køprising med og uten en flaskehals.Til slutt gir vi en enkel oversikt over praktiske erfaringer og problemer med køprising.

Deler av stoffet krever matematiske forkunnskaper.

Title: Static traffic theory and congestion pricing

Author(s): Harald Minken

Date: 04.2014

TØI report: 1314/2014

Pages 46

ISBN Electronic: 978-82-480-1518-5

ISSN 0808-1190

Financed by: Institute of Transport Economics

Project: 67 - Kompensasjon ØL

Quality manager: Anne Madslien

Key words: Congestion pricing
Traffic theory
transport model

Summary:

This report is part of the course material for a course in transport economics that has been held from time to time for new researchers at the Institute of Transport Economics.

We show how volume delay functions can be seen as a combination of Littles formula with an assumption on how motorists adjust their speed to maintain a comfortable distance to the car in front of them. We then derive the commonly known rules of congestion pricing with and without a bottleneck. The last chapter is a simple overview of congestion pricing in practice.

For parts of the material, the reader will need advance knowledge of mathematics at the undergraduate level.

Language of report: Norwegian

Rapporten utgis kun i elektronisk utgave.

This report is available only in electronic version.

Transportøkonomisk Institutt
Gaustadalleen 21, 0349 Oslo
Telefon 22 57 38 00 - www.toi.no

Institute of Transport Economics
Gaustadalleen 21, 0349 Oslo, Norway
Telefon 22 57 38 00 - www.toi.no

Forord

Denne rapporten er første del av kursmateriellet til et kurs i transportøkonomi som har vært holdt fra tid til annen for nyansatte ved Transportøkonomisk institutt. Denne delen tar opp statisk trafikkteori, køprising (med og uten en flaskehals) og optimering under bibetingelser. Andre deler av kurset har bestått av diskret valgteori, enkel oversikt over transportmodeller, og andre aktuelle emner. For disse delene finnes det høvelig kurslitteratur andre steder, så de vil ikke kreve egne rapporter.

Rapporten er skrevet av Harald Minken. Forskningsleder Anne Madslien har stått for kvalitetssikringen, og sekretær Trude Rømming har stått for den avsluttende layoutbehandlingen.

Oslo, mars 2014
Transportøkonomisk institutt

Gunnar Lindberg
direktør

Anne Madslien
forskningsleder

Innhold

Sammendrag:

Statisk trafikkteori og køprising

TØI rapport 1314/2014
Forfatter(e): Harald Minken
Oslo 2014 46 sider

En viktig konklusjon i denne rapporten er at optimal avgift når det finnes flaskehalser består av to deler: En køpris basert på prinsippet om at bilistene skal betale den eksterne marginale kostnaden de påfører andre i form av lavere fart, og en avgift som har til hensikt å erstatte tidskostnaden på grunn av en nærmest stillestående kø foran flaskehalsen, med et tilsvarende pengebeløp. De stillestående køene skal altså tas helt vekk.

Statisk trafikkteori tar utgangspunkt i en stasjonærtilstand, der trafikken inn i et system av veger er lik trafikken ut. Reisetida gjennom en avgrenset del av systemet – en veglenke – vil avhenge av trafikkvolumet. Under visse forutsetninger kan denne sammenhengen utrykkes i form av *volume-delayfunksjoner*, også kalt *køfunksjoner*. En av disse forutsetningene er at alle biler er like, både med hensyn til køskapende emne og med hensyn til hvordan de verdsetter tid. Dette er drastiske forenklinger, men å ta hensyn til alle de virkelige ulikhetene vil gjøre teorien svært komplisert.

I transportmodeller som tar hensyn til at det kan oppstå køer, spiller køfunksjonene på veglenkene en vesentlig rolle. De spiller også en rolle i enkle, statiske teoretiske modeller som vil utlede regler for køprising.

Vi viser i kapittel 1 at dersom man har en modell for hvordan gjennomsnittsbilisten avpasser farta for å oppnå en avstand til bilen foran som han er komfortabel med, vil det gi opphav til en bestemt matematisk utforming av køfunksjonen. Og omvendt: Til enhver bestemt køfunksjon svarer det en sjåføratferd. Kapittel 2 inneholder visse presiseringer om tilbud og etterspørsel etter bilreiser. Deretter utleder vi i kapittel 3 og 4 regler for køprising, både under forutsetning av at det ikke finnes flaskehalser, og under forutseting om en flaskehals som begrenser hvor mye som kan komme ut av systemet. Disse reglene gjelder bare så lenge det finnes en likevekt i systemet, dvs. så lenge bilistenes beslutninger er basert på forventninger om reisetida som viser seg å holde stikk i praksis.

En viktig konklusjon er at optimal avgift når det finnes flaskehalser består av to deler: En køpris basert på prinsippet om at bilistene skal betale den eksterne marginale kostnaden de påfører andre i form av lavere fart, og en avgift som har til hensikt å erstatte tidskostnaden på grunn av en nærmest stillestående kø foran flaskehalsen, med et tilsvarende pengebeløp. De stillestående køene skal altså tas helt vekk.

I kapittel 5 gir vi en enkel gjennomgang av køprising i praksis, både fordelene og problemene.

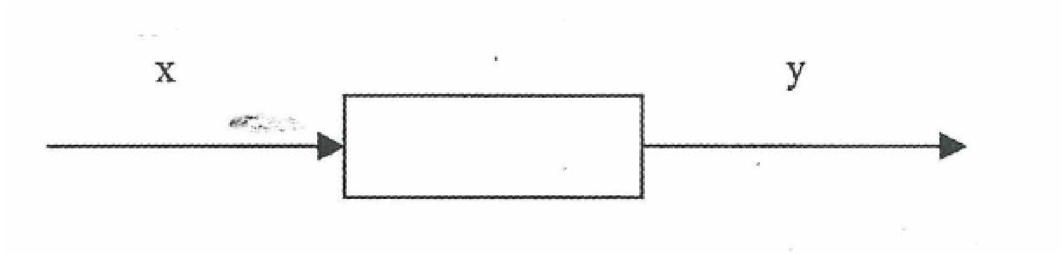
Stoffet i denne rapporten er en del av kursmaterialet i et kurs i transportøkonomi som fra tid til annen er holdt for nyansatte på TØI. De første kapitlene krever visse matematiske forkunnskaper.

1 Statisk trafikkteori

1.1 Modellen

Vi ser på et system med biltrafikk. Det kan f. eks. være en 1 kilometer lang vegstrekning med trafikk i en retning. Men det kan også være et større område med homogene kjøreforhold. Vi observerer systemet over korte tidsperioder innafor en større periode, og sørger for at observasjonsperiodene legges til tidspunkter der input i systemet, dvs. antallet biler som kjører inn i området, kan antas å være gitt ved den samme sannsynlighetsfordeling. Vi noterer gjennomsnittlig input eller ankomstrate pr. tidsenhet, x. Vi noterer også hvor mange biler som kjører ut, eller outputraten y, som et gjennomsnitt for hver av de korte observasjonsperiodene. Hvis det er et system der biler kan gå ut av systemet både ved å parkere innafor området og ved å kjøre ut av området, må vi på en eller annen måte ta med oss antall biler som parkerer og starter opp fra parkeringsplasser i tillegg til de som kjører ut av området og kommer inn.

Figur 1 viser systemet i en av de korte observasjonsperiodene. Her er x forventet input pr. tidsenhet, og y forventet output pr. tidsenhet.



Figur 1

Vår modell for dette systemet består i hovedsak av to relasjoner: Littles formel og en atferdsrelasjon.

Littles formel har allmenn gyldighet for systemer som omformer input til output over tid, og der størrelsene gjennomsnittlig output pr. tidsenhet, gjennomsnittlig antall kunder i systemet på et hvilket som helst tidspunkt innafor denne tidsenheten, og gjennomsnittlig behandlingstid pr. kunde er veldefinerte (Ravindran, Phillips og Solberg 1987, avsnitt 7.5). Det vil vel si at den egentlig bare gjelder når systemet er i likevekt, men vi skal likevel bruke den for korte tidsperioder der systemet er ute av likevekt. Littles formel formuleres ofte som en sammenheng mellom input, behandlingstid og antall kunder i systemet. Den er imidlertid ifølge Ravindran m.fl. i utgangspunktet en sammenheng mellom *output*, behandlingstid og antall kunder. Forskjellen har betydning når systemets kapasitet er endelig, slik at ulikevekt i form av opphopning i eller foran systemet oppstår.

Vanligvis skrives Littles formel slik:

$$L = \lambda W$$

Her er L antall kunder i systemet (eventuelt antall kunder som venter på behandling), λ er forventet ankomstrate for kundene, og W er gjennomsnittlig behandlingstid pr. kunde. Legg merke til at både behandlingstid og ankomstrate er stokastiske variable. Sannsynlighetsfordelingen kan være hva som helst. Likevel gjelder denne lovmessigheten for forventningene, forutsatt at systemet er i likevekt. Det er ofte nyttig å tenke på denne formelen når man skal dimensjonere et system. For eksempel må antall sjukehussenger avpasses mot liggetida, dersom man ikke kan styre antall innleggelser. (I den grad ankomstraten og behandlingstida er usikre, må man naturligvis også ha en ekstrakapasitet.)

Men vi skal bruke formelen på transport.

La altså x og y være input og output pr. tidsenhet i gjennomsnitt, v gjennomsnittshastigheten gjennom systemet (strekningshastigheten) og a den gjennomsnittlige avstanden fra en bil til den neste (målt fra snute til snute, ikke fra snute til hekk, så slipper vi å ta hensyn til hvor lange bilene er). Hastigheten er naturligvis den inverse av behandlingstida pr. lengdeenhet, eller $t = 1/v$, der t er behandlingstida (reisetida) pr. kilometer i systemet. Den totale gjennomsnittlige kjørelengden i systemet er d. Antall biler som befinner seg i systemet i gjennomsnitt er derfor $L = d/a$. Med td i stedet for W og x i stedet for λ blir da Littles formel i vårt tilfelle:

$$da^{-1} = xtd \text{ eller } x = \left(at\right)^{-1} \text{ eller } x = va^{-1}$$

Vi ser at den totale reisetida er uten betydning for formelen – det som betyr noe her er tida det tar å reise en typisk kilometer, eller hastigheten i kilometer pr. time.[1]

En måte å tolke formelen på, er å si at hastigheten er produktet av etterspørselen og avstanden mellom bilene. Spørsmålet blir da: Hva bestemmer avstanden mellom bilene? Og svaret gir seg sjøl: Det er sjåførene. For å få en konsistent og fullstendig trafikkteori for en statisk likevektssituasjon, trenger vi altså en atferdsrelasjon.

Vi kan anta at en sjåfør vil velge en avstand til bilen foran som er den minste avstanden han er komfortabel med. Blir avstanden for liten, vil hun innse at hun har mindre tid til å reagere om det skjer noe uventet. Det innebærer både unødig stress og fare for ulykker. Hun vil derfor bremse litt opp for å gjenfinne en komfortabel avstand. Når alle oppfører seg på denne måten, vil gjennomsnittshastigheten synke når biltettheten øker.

Vi kan videre anta at når trafikken er liten, vil det være langt mellom hver gang sjåføren trenger å tilpasse hastigheten i forhold til andre biler. Eller med andre ord: Hastigheten vil være bestemt av fartsgrensa eller av vegens og bilens egenskaper, ikke av trafikken. Ved litt større trafikk vil det finnes tilfeller der bilistene avpasser farta etter hverandre, men de er få, slik at gjennomsnittfarta er lite påvirket av endringer i trafikken til å begynne med. Jo tettere trafikk, jo mer vil avstanden til forankjørende regulere hastigheten, inntil et punkt hvor trafikken går helt i stå eller blir veldig følsom for små hendelser.

[1] Blakstad (1993) kaller formelen $x = va^{-1}$ for "væskestrømsanalogien". Men denne sammenhengen står på egne bein – det er ingen analogi, men en lovmessighet.

Vi antar derfor en funksjonssammenheng $v = f(a)$ mellom fart og gjennomsnittlig avstand mellom bilene. Funksjonen er tiltakende, dvs. $f' > 0$. Når avstanden mellom bilene går mot 0, går også hastigheten mot 0, og når avstanden går mot uendelig, går farta mot fartsgrensa (eller en grense som settes av forholdene). Maksimalfarta skriver vi $v_{\max}$. Vi har altså å gjøre med en tiltakende og konkav funksjon som begynner i origo (omtrent) og nærmer seg maksimalfarten asymptotisk, eller som oppnår maksimalfarta på et visst punkt og er konstant etter det. Dette er hva vi antar a priori.

Det er klart at ulike spesifiseringer av funksjonen ut over dette, vil gi opphav til ulike modeller for bilkøer. Eller for å uttrykke det mer objektivt: Ulike købilder vil framkomme når bilistene endrer atferd. Hva som er den riktige spesifikasjonen kan bare undersøkes empirisk.

Vi kan for eksempel tenke oss en lineær sammenheng mellom hastighet og biltetthet, $v = v_{\max} - \beta a^{-1}$, eller en eksponensiell sammenheng, eller noe annet. I følge Blakstad (1993) har den lineære sammenhengen støtte i undersøkelsene til Greenshields, som riktignok er gamle. Nyere undersøkelser støtter en eksponensiell sammenheng. Det antas likevel at den lineære sammenhengen er en brukbar forenkling (Blakstad 1993).

Legg ellers merke til at en og samme atferd er forutsatt for alle bilister. Dette er en streng forutsetning. Å erstatte den med en teori som sier at ulike grupper av bilister har ulik kjøreatferd, ville komplisere teorien svært mye. En slik komplikasjon kan likevel være essensiell når man skal bruke teorien til å utforme sanntids trafikkstyringssystemer.

Uansett, vår modell i den mest generelle forma er altså:

$$\begin{aligned} x &= va^{-1} \\ v &= f(a) \end{aligned} \tag{1}$$

Funksjonen *f*(.) har de egenskapene som er beskrevet i teksten. I tillegg antar vi også at det er en modell for likevekt, dvs. $y = x$.

Løsningen av modellen er enten en speed-flow-kurve eller en volume-delay-funksjon. En speed-flow-kurve er en sammenheng mellom etterspørselen x og hastigheten v, mens en volume-delay-funksjon er en sammenheng mellom etterspørselen x og reisetida t. Tilsynelatende er de to formuleringene av løsningen helt ekvivalente, men som vi skal se er det ikke tilfelle. Til hver etterspørsel hører en entydig reisetid, men til en gitt hastighet vil det høre to etterspørselsnivåer. Speed-flow-kurva er altså ingen funksjon. Bare det ene etterspørselsnivået er forenlig med likevekt, det andre representerer ingenting, ifølge konvensjonell tenkning.

Fra nå av kaller vi volume-delay-funksjoner vd-funksjoner eller køfunksjoner. I det følgende drøfter vi kort noen vanlige vd-funksjoner Deretter ser vi på hva disse impliserer om atferdsrelasjonen *f*(.). Til slutt ser vi på hva en bestemt atferdsrelasjon impliserer om vd-funksjonens form. Det vil alltid være mulig å finne atferden gitt en vd-funksjon og vd-funksjonen til en gitt atferd.

1.2 Køfunksjoner (vd-funksjoner)

En køfunksjon er en sammenheng $t = t(x)$ mellom kjøretid pr. kilometer og etterspørselen (trafikkvolumet).

Det er ikke vanlig å bruke (1) til å utlede køfunksjoner. Vanligvis etableres de enten ved systematiske empiriske undersøkelser eller ved en aksiomatisk framgangsmåte som fastlegger hvilke egenskaper funksjonen skal ha.

Den overlegent mest brukte funksjonsforma er den såkalte BPR-funksjonen, som blei estimert i et stort forsøk i USA på begynnelsen av 60-tallet (BPR 1964). BPR-funksjonen er:

(2) $$t = t_0\left(1+\alpha\left(\frac{x}{c}\right)^{\beta}\right)$$

der t_0 er kjøretid pr. kilometer ved "fri flyt", dvs. når det ikke er andre biler på vegen som kan hindre framkommeligheten, c er vegens kapasitet, og α og β er parametre. Ved det opprinnelige eksperimentet blei α estimert til 0,15 og β til 4. Når trafikken er i nærheten av kapasiteten eller over, vil kjøretida altså øke svært raskt for hver ny bil som kommer inn i systemet.

Men hvordan skal vi definere c, vegkapasiteten? En mulighet er å si at kapasiteten er nådd når kjøretida går mot uendelig, dvs. alt stopper opp. Den definisjonen kunne nok la seg bruke om vi så på et større vegsystem, for eksempel hele indre by. Men normalt betrakter vi kapasiteten på en og en veglenke, dvs. strekningen mellom et stort vegkryss og det neste. Og da er det ikke slik at det hele stopper opp. I stedet vil køen forplante seg bakover til forrige lenke. Kapasiteten av en veglenke er altså det største trafikknivået som er forenlig med at køene ikke forplanter seg bakover. Eller med andre ord: Det største trafikknivået som det er mulig å avvikle i det systemet vi ser på, uten at likevekta går tapt.

Etter det store forsøket i 60-åra har de to parametrene ofte blitt reestimert for forskjellige vegtyper og trafikksituasjoner. Noe av dette finner man ved å søke etter volume-delay functions på Google og Google Scholar.

Men samtidig har det også blitt vanlig å innføre en annen definisjon av vegkapasiteten. Det gjøres ved å sette $\alpha = 1$. Uansett hva β er, vil det da være slik at når kapasiteten er oppnådd, altså $x = c$, så er kjøretida det dobbelte av fri flyt. I denne tradisjonen er altså kapasiteten det punkt der kjøretida er det dobbelte av fri flyttida. En fordel med dette er at det blir lettere å observere kapasiteten. En ulempe må vel være tapet av nøyaktighet når vi fastsetter den ene parameteren på forhånd. Men om det er et virkelig tap, avhenger jo av om $\alpha = 1$ er realistisk for den vegtypen vi ser på, og om usikkerheten uansett er så stor at det er vanskelig å si at det ene er bedre enn det andre.

Den største konkurrenten til BRP-funksjonen er den koniske køfunksjonen (Spiess 1990). Begrunnelsen for denne funksjonen er praktisk. En viktig del av en bytransportmodell er nettutleggingen eller rutevalgsmodellen, som har til hensikt å finne ut hvilke ruter gjennom vegsystemet trafikantene vil velge når de har bestemt seg for hvilke reiser de vi ta. Det viser seg at når vi legger inn køfunksjoner på lenkene i en bytransportmodell, øker regnetida svært mye dersom disse funksjonene stiger bratt. En β på 4 vil åpenbart gi en veldig bratt kurve når trafikken er stor. Den koniske køfunksjonen, derimot, gir et realistisk bilde av kjøretida fram til et stykke over kapasitetsgrensa, men deretter vil stigningen ikke tilta ytterligere, slik som i BPR-funksjonen. Siden det hører med til metoden for å løse transportmodellen at noen lenker vil bli sterkt overbelastet i de første rundene av beregningene, før det hele roer seg ned til mer moderat trafikk på lenkene i den endelige løsningen, innebærer den koniske funksjonen at en sparer regnetid i starten av beregningen, uten å ofre så mye realisme i den endelige løsningen.

Den koniske køfunksjonen har altså alle de egenskaper som teori og praksis tilsier, bortsett fra at den ikke straffer bilene så hardt som den burde når trafikken blir større enn kapasiteten. Kapasiteten er for øvrig også her definert ved den doble kjøretida.

En funksjon som har vært brukt tidligere, er Davidsons køfunksjon. Den har forma:

(3) $$t = t_0\left(1 + \frac{bx}{c - x}\right)$$

der b er parameteren som må estimeres. Vi ser at i denne funksjonen kan trafikken aldri overstige kapasiteten c. Når x går mot c, går t mot uendelig, og det samme gjør den deriverte, dvs. stigningen på kurven. Dette er lite praktisk, og kapasitetsbegrepet er også annerledes enn det vanlige. Dessuten er stigningen for bratt også ved små trafikkvolumer.

Et alternativ som sies å være svært godt, er Akceliks køfunksjon (Akcelik 1991). Den har ikke vært brukt i Norge.

I reint teoretiske arbeider brukes ofte lineære funksjoner, dvs.

(4) $$t = t_0 + bx$$

1.3 Atferdsrelasjonen som følger av en gitt køfunksjon

For en gitt køfunksjon kan vi finne ut hva slags atferd den impliserer ved å erstatte x i køfunksjonen med va^{-1} og t med v^{-1}, og så finne v som funksjon av a. For den lineære køfunksjonen (4) gir det følgende resultat:

(5) $$v = f\left(a\right) = \frac{-av_{\max}^{-1} + \sqrt{\left(av_{\max}^{-1}\right)^2 + 4ab}}{2b}$$

Vi antar naturligvis at $a > 0$. Vi ser at v da er positiv (heldigvis) og at $f(0) = 0$. Det er også forholdsvis lett å vise at $f(a)$ er tiltakende overalt og at den dobbelt-deriverte alltid er negativ. Atferdsfunksjonen $f(.)$ er altså tiltakende og konkav. Litt strev med l´Hopitals regel vil også vise at funksjonen går mot 0 når a går mot 0 og mot $v_{\max}$ når a går mot uendelig. Funksjonen tilfredsstiller altså alt vi i utgangspunkt mener å vite om sjåførenes atferd. Den lineære køfunksjonen samsvarer derfor overraskende godt med våre antakelser om sjåførenes tilpasning til trafikken. På den praktiske sida burde den være like god som den koniske.

Samme framgangsmåte for Davidsons funksjon gir:

(6)
$$v = \frac{-\left(ca + v_{\max}\right) + \sqrt{\left(ca + v_{\max}\right)^2 + 4\left(1-b\right)cav_{\max}}}{2\left(1-b\right)}$$

Her er riktignok $v = f(a)$ en positiv og tiltakende funksjon, og $f(0) = 0$. Men det er et problem. Funksjonen er ikke definert for $b = 1$. Vi får håpe estimering vil gi helt andre verdier. (Her har vi forutsatt $b < 1$. Om $b > 1$ må vi skifte fortegn på kvadratroten.)

Det naturlig å kreve at v går mot $v_{\max}$ når $x = av^{-1}$ går mot c. Og det ser da også ut til å stemme.

Om vi til slutt undersøker atferdsfunksjonen som svarer til BPR-funksjonen, kommer vi fram til følgende likning:

(7)
$$\alpha\left(ca\right)^{-\beta} \cdot v^{\beta+1} + v - v_{\max} = 0$$

Denne likningen har en eksplisitt løsning bare for spesielle verdier av β. Vi kan likevel slå fast at når a går mot 0, går også v mot 0, og når a går mot uendelig, går v mot $v_{\max.}$ Ved å differensiere likningen kan vi også finne at

$$\frac{dv}{da} = \frac{\alpha\beta\left(ca\right)^{-\beta} v^{\beta}}{\alpha\left(\beta+1\right)\left(ca\right)^{-\beta} v^{\beta} + 1} \cdot \frac{v}{a}$$

Dette innebærer at funksjonen er tiltakende og at elastisiteten av v med hensyn på a er mindre enn 1.

Det kan se ut til at ingen av de tre køfunksjonene vi har undersøkt, kan utelukkes fordi de ikke samsvarer med det vi i utgangspunktet mener å vite om sjåføratferd.

1.4 Implikasjoner av atferdsfunksjonen for køfunksjonen

Her tar vi utgangspunkt i en atferdsfunksjon $v = f(a)$. Vi bruker Littles formel, $x = va^{-1}$, til å eliminere a, og går til slutt over fra speed-flowformuleringen $v = v(x)$ til køfunksjonen $t = t(x)$.

Konkret velger vi atferdsfunksjonen:

(8) $$v = v_{\max} - \beta a^{-1}$$

Siden v skal være mellom 0 og $v_{\max}$, er definisjonsområdet for funksjonen

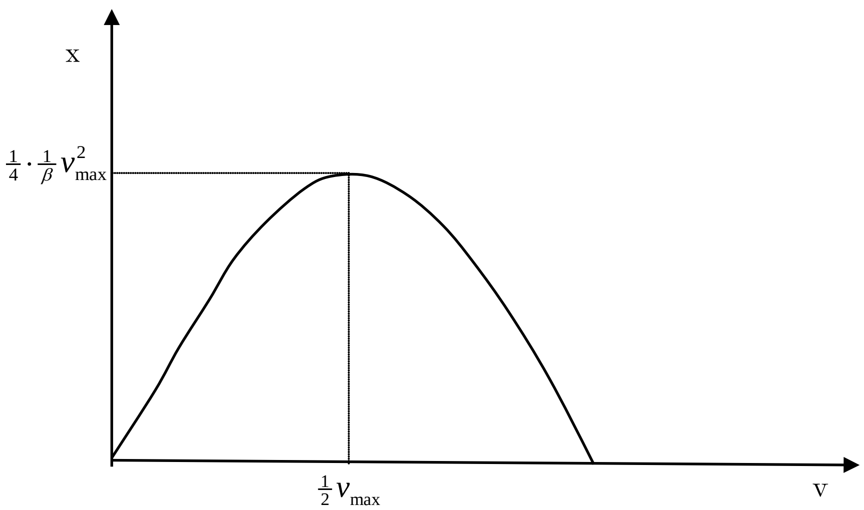
$$a \in \left[\frac{\beta}{v_{\max}}, \rightarrow \right).$$

Dette gir oss også vegledning når det gjelder å velge størrelse på parameteren β. Hvis a er målt i kilometer og $v_{\max}$ i km/t, vil punktet hvor trafikken stopper helt opp, trolig befinne seg et sted hvor β er mellom 0,1 og 0,5, litt avhengig av fartsgrense og vegtype.

Når vi setter inn $a = vx^{-1}$ i (8), kommer vi fram til annengradslikningen

$$v^2 - v_{\max} v + \beta x = 0$$

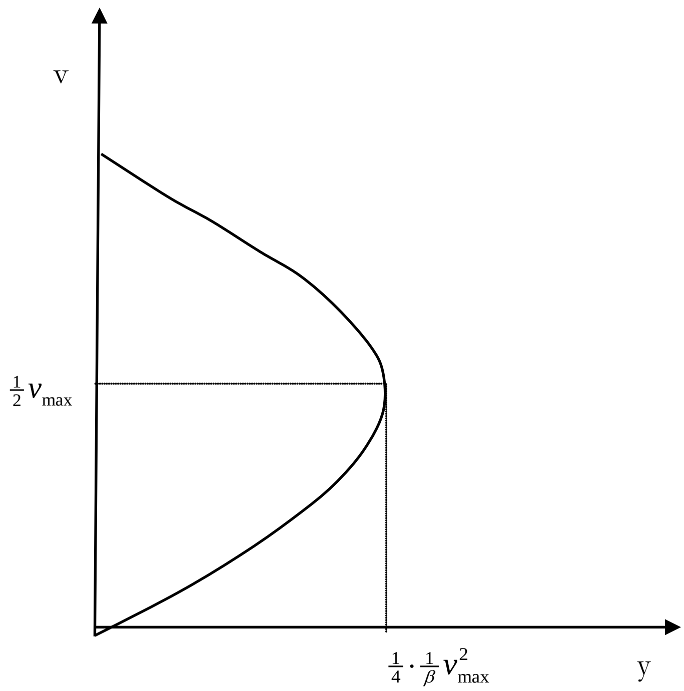
Løser vi den med hensyn på x, og finner x som funksjon av v, så er den en parabel med toppunkt $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\beta} v_{\max}^2$, som vist i Figur 2:



Figur 2

1.4.1 Speed-flow-kurva

Bytter vi om aksene i Figur 2, får vi Figur 3. Figuren viser speed-flow-kurva, dvs. en kurve som viser hva hastigheten er ved ulike nivåer av *output* y. Vi viser y på den horisontale aksen, nettopp fordi vi ikke kan forutsette likevekt $x = y$ langs med hele kurva.



Figur 3

Øvre halvdel av speed-flowkurva representerer tilfellet $x = y$, eller stasjonær-tilstanden. Fra "fri flyt"-punktet v_{max} går farta sakte ned når både input x og output y øker i samme takt. Maksimal output y oppnås i punktet $\frac{1}{2}v_{max}$, dvs. når hastigheten er halvparten av hva den maksimalt kan være, eller kjøretida er det dobbelte. Det er en tilfeldighet at dette punktet er det samme som konvensjonelt blei definert som systemets kapasitet i den modifiserte BPR-funksjonen. I vår modell, i motsetning til BPR-modellen, er det intuitivt riktig å definere kapasiteten c som trafikkvolumet når hastigheten er halvert:

(9) $$c \equiv \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\beta}v_{max}^2$$

Så langt har biltettheten økt med trafikken inn i systemet, men det har ikke medført en så stor hastighetsreduksjon at det har redusert trafikken ut av systemet. Men når input overstiger kapasiteten c, reduseres farta enda mer, samtidig som output y i systemet reduseres fordi fartsreduksjonen virker sterkere enn den økte tettheten. Dette gir nedre del av speed-flowkurva. I et dynamisk perspektiv er denne situasjonen ikke stabil, men må forverre seg fra minutt til minutt inntil v = 0, hvoretter køene må begynne å bygge seg opp foran systemet. Fra en tilstand i nedre del av speed-flowkurva kommer vi ikke tilbake til et stabilt system sjøl om $x < c$. Først når $x < y$ kan det skje.

Erfaring av denne typen kan ofte fortelle oss hva systemets kapasitet er. Hvis vi antar at vi kjenner c, kan vi uttrykke speed-flow-kurva ved hjelp av c i stedet for β, som kan være en litt keitete variabel å måle på. Løser vi (9) for β og setter inn i speed-flow-sammenhengen $v^2 - v_{\max} v + \beta x = 0$, får vi:

(10) $$\frac{x}{c} = 4\frac{v_{\max} - v}{v_{\max}} \cdot \frac{v}{v_{\max}}$$

Denne sammenhengen gjelder bare for $x < c$.

1.4.2 Køfunksjonen

Vi erstatter nå v med t^{-1} og $v_{\max}$ med t_0^{-1} i (10). Samtidig bytter vi fra x til y, av grunner som vil bli klart etter hvert. Det gir

(11) $$\frac{y}{c} = 4\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) \cdot \frac{t_0}{t}$$

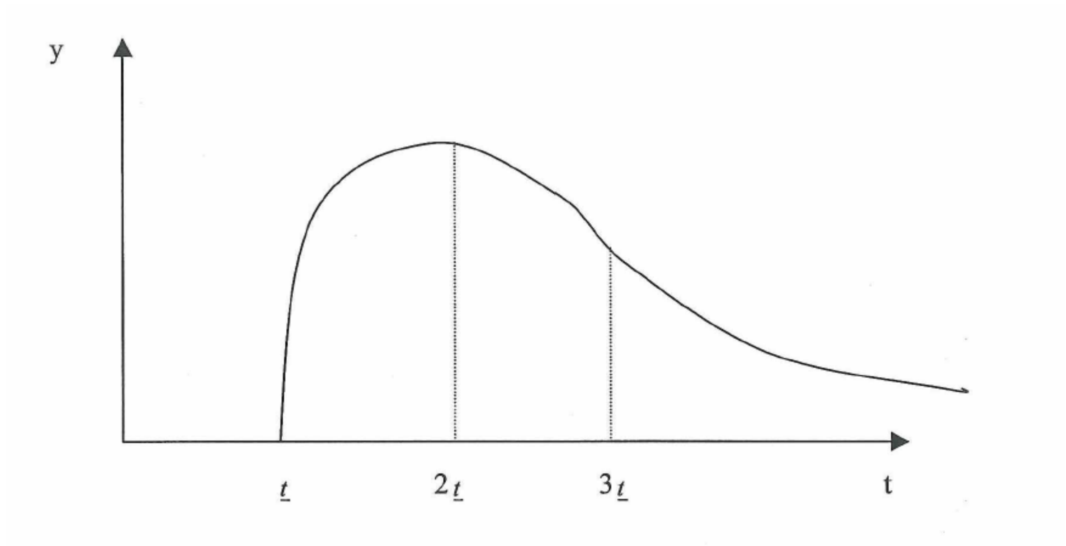
Likning (11) gir y som funksjon av t. La oss se hvordan denne funksjonen ser ut. Vi beregner den deriverte dy/dt og den dobbelderiverte d^2y/dt^2 og får:

(12) $$\frac{dy}{dt} = 4c\frac{t_0}{t^2}\left(2\frac{t_0}{t} - 1\right)$$

(13) $$\frac{d^2y}{dt^2} = 8c\frac{t_0}{t^3}\left(1 - 3\frac{t_0}{t}\right)$$

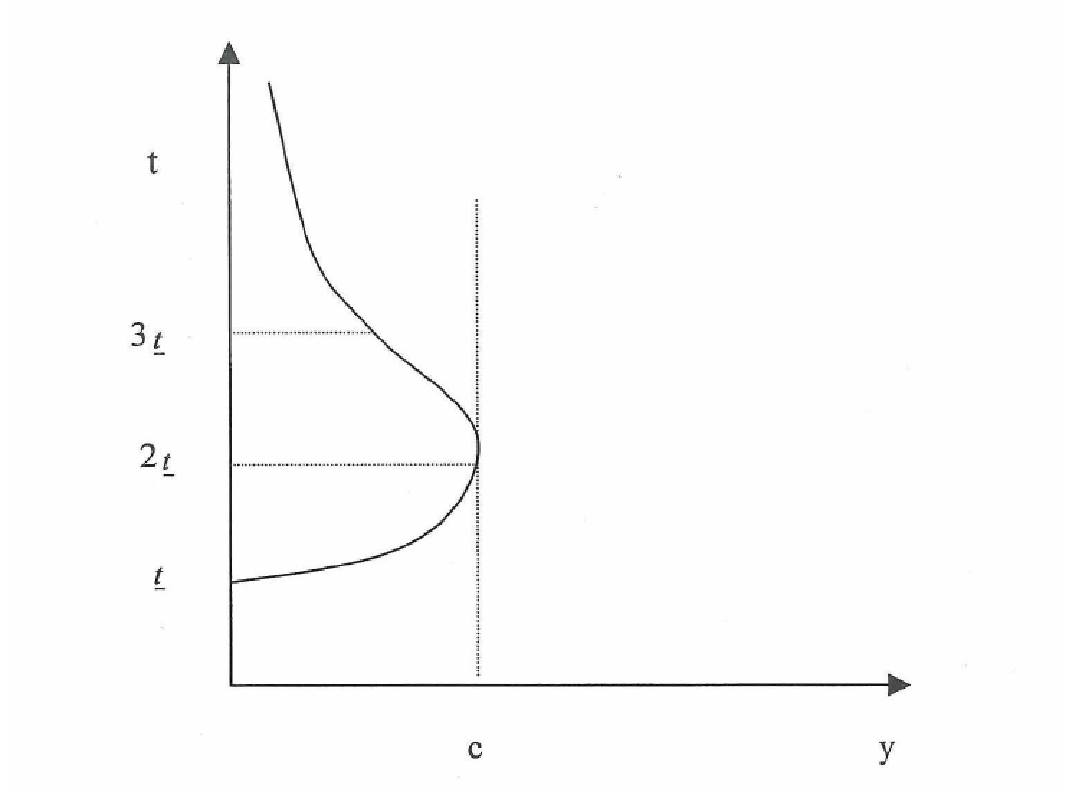
Det fram går av (12) at funksjonen y har et toppunkt for $t = 2t_0$ og et vendepunkt for $t = 3t_0$. Kurva må altså se ut som på Figur 4:[2]

[2] På grunn av et teknisk problem er t_0 skrevet $\underline{t}$ i Figur 4, 5 og 6.



Figur 4

Dette er ikke den vanlige måten å framstille køfunksjonen på. Det normale er at vi bytter om på aksene i Figur 4 og framstiller køkurva som i Figur 5.



Figur 5

Vi ser nå at sjøl om *y* er en funksjon av *t*, som vist i Figur 4 og Formel (11), er *t* ikke en funksjon av *y*, eller av *x* for den saks skyld. Til hver verdi av *y* (unntatt

$y = c$) svarer det jo ikke én verdi av t, men to. Derimot kan vi si at kurva i figuren er satt sammen av to funksjoner, én over og en under $2t_0$. Vi skal nå vise hvilke to funksjoner dette er og hva de betyr.

Om vi går tilbake til likning (11) og ordner den litt, viser den seg å være en annengradslikning i t, nemlig

$$\tfrac{1}{4}\frac{x}{c}t_0^{-1}\cdot t^2 - t + t_0 = 0$$

Løser vi den, får vi:

(14) $$t = 2t_0\left(\frac{y}{c}\right)^{-1}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{y}{c}}\right)$$

Plusstegnet gir den øverste delen av kurva, mens minustegnet gir den nederste. I Figur 5 representerer den nederste delen av kurva, under $2t_0$, stasjonærtilstanden eller likevektstilstanden der $x = y$. Det er bare denne delen som egentlig kan kalles en køfunksjon. Den er konveks og har stigningstall som er eller går mot uendelig når y går mot kapasitetsgrensa. Hva den øvre delen representerer, har vært mye diskutert. Den er åpenbart noe mer enn bare en falsk løsning av en annengrads-likning. Det er nemlig mulig å observere punkter som ligger på eller i nærheten av den øvre delen av kurva i et datamateriale som omfatter observasjoner av ulike-vektssituasjoner, der trafikken i systemet er så tett at output faller, samtidig som farta går ned fra farta ved kapasitetsgrensa.

Vi skal komme tilbake til dette problemet. Foreløpig er det klart at i den øvre delen av kurva har y blitt mindre enn x, altså ulikevekt. Det er grunnen til at vi måtte skifte variabel fra x til y når vi skulle framstille denne delen av kurva. Plusstegnet i (14) representerer altså muligens, får vi si, kjøretida per kilometer som funksjon av output i en ulikevektssituasjon, Minustegnet representerer i alle fall kjøretida i en likevektssituasjon som funksjon av x eller y, etter fritt valg siden de begge er like.

2 Tilbud og etterspørsel i et bilreise-marked

2.1 Gjennomsnittlig og marginal samfunnsmessig reisekostnad

Vi vil nå så sterkt vi kan understreke et poeng som i og for seg er opplagt, men som de fleste økonomer som ikke er vant med transportøkonomi likevel stadig roter med. *I framstillinga i avsnitt 1.4* (nedre del av kurva i figur 5), *er t reisetida pr. kilometer for hver eneste reise som foregår i vår lille observasjonsperiode*. Det er ikke slik at de første som reiser i perioden, opplever reisetida t_0, mens reisetida for de siste går mot $2t_0$. Alle de reisende i modellen opplever samme trafikkforhold og bruker samme reisetid. Køfunksjonen viser altså den samfunnsmessige gjennomsnittsreisetida.

Anta nå at reisekostnaden kan skrives som en lineær funksjon av reisetida, en såkalt generalisert kostnad G.

(15) $$G = p + \omega t$$

I (15) er p pengeutlegget for reisa, som vi altså antar er upåvirket av farta eller reisetida. ω er verdien av en spart time på en reise av det slaget vi har her — den såkalte tidsverdien. Vi får anledning til å komme tilbake til den og til den lineære funksjonsforma i (15). Vi skal bare her merke oss at siden verdien av en spart time på reise er hva den reisende maksimalt ville vært villig til å betale for besparelsen, er det ingen grunn til å regne med at tidsverdien er den samme for ulike individer, og heller ikke for reiser med ulike transportmidler, siden det knytter seg ulik grad av ubehag og ulempe til transportmidlene. Den enhetlige tidsverdien for alle reisende som ligger i (15), er altså en vidtgående forenkling.

Vi kunne nå utrykke køfunksjonen (14) i form av generalisert reisekostnad i stedet for reisetid. Siden dette er en enkel lineær transformasjon av t, vil figurene 4 og 5 ikke endre form, bare beliggenhet i diagrammet, og alt vi sagt om reisetid, kan også sies om generaliserte kostnader. Når vi nå går over fra trafikkteoriens fysikk og psykologi til økonomi, vil vi i stedet for å snakke om reisetid snakke om reisekostnader (som en forkortelse for generaliserte reisekostnader). Så lenge p og ω er konstanter, er endringen kun kosmetisk, og vi kunne for den saks skyld godt sette $p = 0$ og $\omega = 1$.

Etter at p er lagt til og t er skalert opp med en enhetskostnad pr. tidsenhet, viser altså køfunksjonen oss hvor mye det koster å gjennomføre en reise av gjennomsnittlig lengde i vårt område, sett fra samfunnet synspunkt. Man kunne kanskje ha kalt det den marginale kostnaden ved å reise, *sett fra den enkelte reisendes synspunkt*, fordi en som observerer trafikkforholdene og vakler mellom å foreta en reise eller ikke, står overfor denne kostnaden, han som de andre. Men man kan ikke kalle det *den samfunnsmessig marginale reisekostnaden*. Den er noe annet.

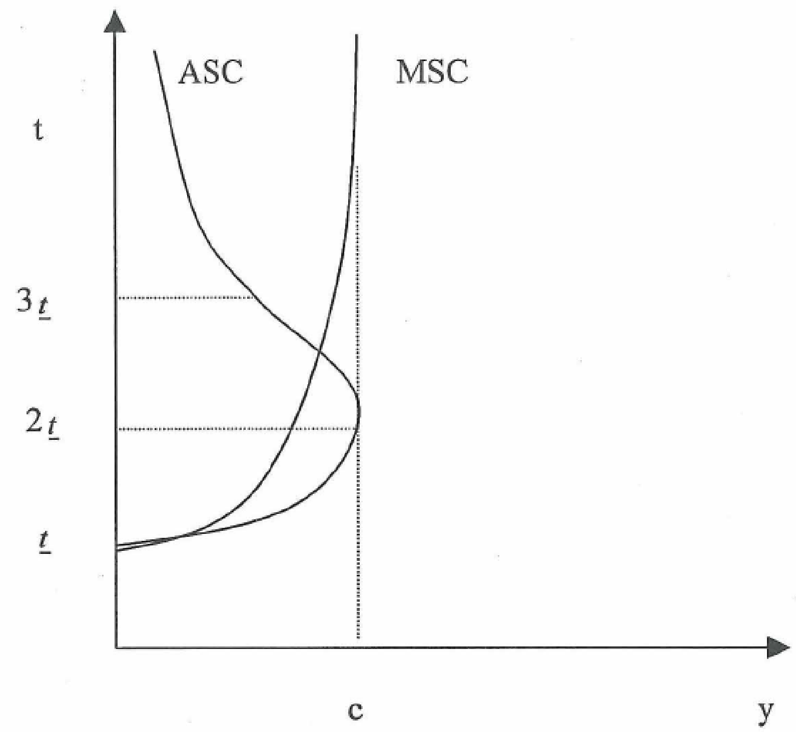
Vi forutsetter nå likevekt, og bruker etterspørselen *x* både som det samlede antall reiser som folk i dette området ønsker å gjennomføre når reisekostnaden er slik den er, og som det antall som faktisk blir gjennomført. Den samfunnsmessig marginale kostnaden er den økningen i samfunnets reisekostnader som en ekstra reise i dette området gir opphav til. Den ekstra reisa vil jo øke reisetida for alle, etter det vi så i avsnitt 1.4. Vi kaller den samfunnsmessig marginale kostnaden MSC. MSC er den deriverte av samfunnets totale reisekostnader i dette reise-markedet, altså den deriverte av $(p + \omega t)x$. Ved å bruke (11) finner vi:

(16) $$MSC = \frac{\partial\left(p+\omega t\right)x}{\partial x} = \omega t_0\left(1-\frac{x}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Nå kan vi kalle $p + \omega t$ for ASC (gjennomsnittlig samfunnsmessig kostnad). I figur 6 har vi tegnet inn ASC og MSC i samme diagram, forutsatt $p = 0$ og $\omega = 1$. På grunn av vanskeligheter med tegneprogrammet, ser det ut som ASC og MSC ikke begge begynner i t_0, men det gjør de.[3] MSC ligger alltid over ASC i det tilfellet der de begge er definert, nemlig i stasjonærtilstanden. Dette er som det må være når gjennomsnittlige reisekostnader er stigende, naturligvis.

Men la oss enda en gang gjenta vårt poeng: Gjennomsnittskostnadene er ikke stigende fordi de siste reisene er dyrere å produsere enn de første. De er alle akkurat like dyre, eller m.a.o. reisetida er den samme for alle. Det som skjer er at den siste reisende påfører alle den samme reisetidsøkning. Det er derfor vi sier at kø er en ekstern effekt. En ekstern effekt eksisterer når det finnes kvanta som inngår i en aktørs nyttefunksjon, budsjettbetingelse eller produktfunksjon og som han ikke har kontroll over sjøl. Her påvirker den siste reisende alle de reisendes tidsbruk, slik at de ikke lenger har kontroll med sin egen tid.

[3] I figuren er dessuten t_0 kalt $\underline{t}$.



Figur 6

2.2 Diagram av et bilreisemarked

I første kapittel snakket vi om likevekt i trafikken på en strekning eller i et område, og med det mente vi at gjennomsnittstrafikken inn i området også var gjennomsnittstrafikken ut av området. Vi kalte det også en stasjonærtilstand, dvs. en tilstand der forventet antall biler inn og ut av området ikke endrer seg. Nå vil vi ta for oss et annet likevektsbegrep, nemlig likevekt mellom tilbud og etterspørsel etter reiser i et bilreisemarked.

Så hva er et bilreisemarked?

For det første gjelder det reiser av et bestemt slag, for eksempel reiser fra sone A til sone B i tidsperiode T. Reisene kan gå gjennom mange områder av det slaget vi behandlet i kapittel 1, og hvert område kan ha sine kjøreforhold. Sagt på en annen måte: En bilreise følger en bestemt rute, og ruta består av veglenker, hver med sin trafikk. Trafikken på en lenke kan være sammensatt av reiser av mange forskjellige slag.

For det andre produseres ikke bilreisene av en bedrift, og de omsettes ikke i et marked. Det dreier seg i stedet om egenproduksjon (husholdsproduksjon). Vi kjøper ikke bilreiser, vi setter oss i bilen og kjører.

Likevel, hvor mange som reiser på en strekning eller i et område i et gitt tidsrom er avhengig av hva det koster av oppofrelser. Derfor kan vi anta at det er gitt en aggregert etterspørselskurve etter slike reiser. Denne kurva må være en avtakende funksjon av generaliserte reisekostnader *G*.

(17) $$x = D(G),\ D'(G) < 0$$

(Tenk igjennom: Hvorfor må etterspørselskurva nødvendigvis være aggregert?)

Samtidig er det også gitt et "tilbud". "Tilbudet" er det det koster å reise på denne strekningen i dette tidsrommet. Vi veit allerede at det avhenger av hvor mange som reiser:

(18) $$G = S(x) = p + \omega\, t(x)$$

Likevekt er der hvor etterspørselskurva krysser tilbudskurva, dvs. at G i (18) er G i (17), og x i (18) er x i (17). Eller kort sagt: $S(D(G)) = G$, alternativt $D(S(x)) = x$.[4]

Hva skjer om det ikke er likevekt? Det vil i så fall bety at folk tar feil av de virkelige køforholdene. De tror kanskje at køene er små, og setter seg i bilen på grunnlag av det de mener er relativt liten G. For seint oppdager de at den G som de samlede reisebeslutningene har skapt, er større enn de trudde. Eller de blir hjemme fordi de vurderer køene å være for store, bare for å slå på radioen og høre at trafikken går uten noen problemer i det hele tatt.

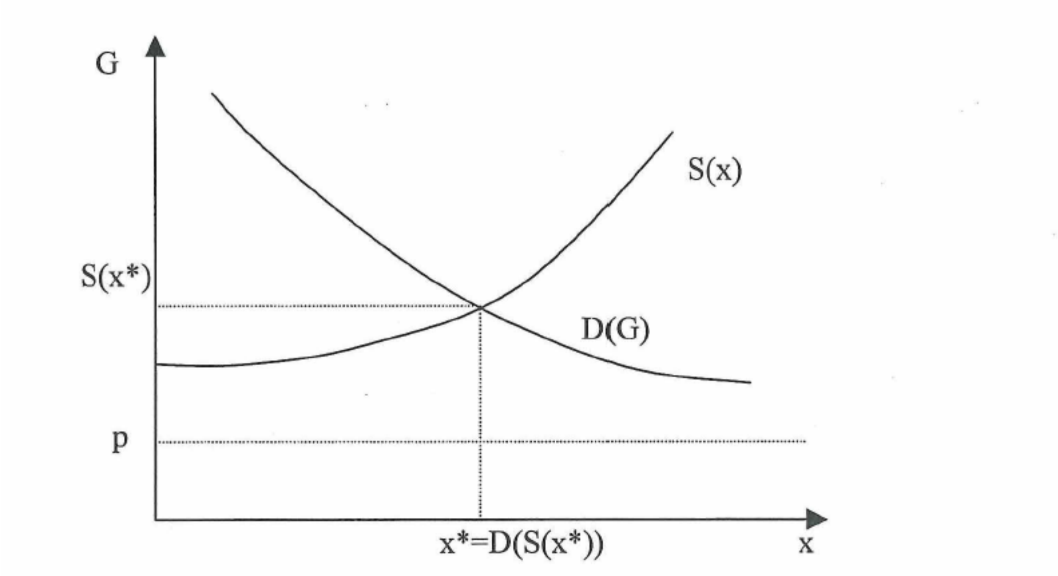
Det er tenkelig at disse potensielle reisende straks oppfatter situasjonen og kaster seg i bilen for å utnytte de gunstige køforholdene. Dette vil drive opp G inntil etterspørsel og tilbud er i likevekt. Skulle derimot radioen melde om en høy G, tar folk en ekstra kopp kaffe og en ekstra kikk på avisa før de drar. Det reduserer G til et nivå som gjør at de forventningene folk har når de treffer sine reisebeslutninger, samsvarer bedre med de trafikkforholdene som de faktisk vil møte når de drar.

De mekanismene som sikrer likevekt mellom "tilbud" og etterspørsel, er altså perfekt informasjon og ingen tidsforsinkelse i tilpasningene. Ettersom disse mekanismene hører hjemme i himmelen snarere enn på jorda, opplever vi i praksis ofte bilreisemarkeder som ikke er i likevekt. Dette tar seg uttrykk i at etterspørselen x i (17), dvs. den realiserte inputraten til systemet, ikke er lik den gjennomsnittlige inputraten x i Figur 1. Folk vil angre seg og banne i køen, de opplever en overraskende forsinkelse, og mobiltelefonselskapene får økt sine inntekter.

Åpenbart er den likevekta vi snakker om her, en spillteoretisk likevekt, ikke en markedslikevekt. Som sagt, folk kjøper ikke bilreiser. Åpenbart kan det også oppstå ulikevekt sjøl om systemet ikke er i nærheten av full kapasitetsutnyttelse. (Når systemet er regelmessig overbelastet, kan vi bare snakke om en likevekt mellom tilbud og etterspørsel ved å trekke inn dynamikk, idet de reisende reiser på forventninger om når køen vil tette seg fullstendig til og når den vil løse seg opp).

La oss tegne opp diagrammet til markedet vårt:

[4] Her forutsetter vi at det bare er en type reiser som påvirker trafikkforholdene. Hvis det var flere, ville likevekten være et sett av etterspørselsfunksjoner, hver med generaliserte kostnader som er funksjoner av etterspørselen i alle reisemarkedene. Dette blir for komplisert for oss nå, men vi kommer litt nærmere inn på det i avsnitt 2.3.



Figur 7

Vi merker oss følgende om bilreisemarkedet:

a) Dette diagrammet gjelder i et mye mindre tidsrom enn vanlige markedskryss. Det er fordi produksjon og forbruk av reiser faller sammen i tid. I dette lille tidsrommet er det lite realistisk at den enkelte reisende tar mer enn en tur.

b) Siden kostnaden ved min produksjon av reiser er avhengig av hvor mange andre som driver sin egen produksjon av reiser samtidig, har vi en ekstern virkning fra trafikant til trafikant. *Kø er en eksternalitet.*

c) Likevekta er der hvor etterspørselskurva krysser enhetskostnadskurva. S(x) er den gjennomsnittlige kostnaden pr. reise, eller enhetskostnaden. "Tilbuds-kurva" er altså enhetskostnadskurva. Nettopp dette er det økonomer ikke kan forstå, fordi de er vant til at tilbudskurva er marginalkostnadskurva. Årsaka til at det er annerledes her, er at kø som eksternalitet virker slik at alle reisene får samme kostnad. Sett fra den enkelte reisende sitt synspunkt kan en godt si at reisekostnaden S(x) er en marginalkostnad, nemlig forskjellen mellom kostnaden ved en og ingen turer. Denne private marginalkostnaden er altså lik gjennomsnittskostnaden overalt, slik at den samfunnsmessige gjennomsnitts-kostnaden og den private marginalkostnaden er det samme. Men den samfunnsmessige marginalkostnaden er kostnaden som den siste reisende opplever sjøl, pluss den økningen i enhetskostnaden for reiser som han påfører alle andre.
I et vanlig marked vil den aggregerte tilbudskurva kanskje stige fordi økende priser bringer inn produsenter med dårligere effektivitet, som ikke var konkurransedyktige ved lavere priser. Dette påvirker ikke på noen måte produksjonskostnadene til de effektive bedriftene, som kan få et såkalt "produsent-overskudd" når prisene dekker mer enn kostnadene. I bilreisemarkedet er det ikke slik. De som reiste til lavere kostnader ved små volumer, må reise til økte kostnader når volumet stiger.

d) Likevektsprinsippet er her spillteoretisk. I likevektspunktet vil ingen som reiser, angre på det, dersom ikke noen andre reisende endrer sin beslutning. Det samme gjelder de som ikke reiser.

2.3 Rutevalg. Wardrops prinsipp

Den mest hensiktsmessige definisjonen av reiser i de fleste sammenhenger er som nevnt å definere dem ved et knippe av kjennetegn: *fra* et bestemt sted A *til* et bestemt annet sted B, med et bestemt *reisemiddel*, på et bestemt *tidspunkt*.

En *rute* mellom A og B er et sett av veglenker som fører fra A til B. Det inngår ikke i vår definisjon av reiser hvilken rute som velges på reisa. Derimot tar vi det som et prinsipp at trafikantene alltid vil velge billigste rute (målt i reisetid eller generaliserte kostnader). Om de gjør det, oppstår *brukerlikevekt*. Det er en spillteoretisk likevekt som er kjennetegnet ved at alle ruter som er i bruk på en reise, har samme kostnad, og denne kostnaden er lavere kostnad enn kostnaden på ruter som ikke er i bruk.

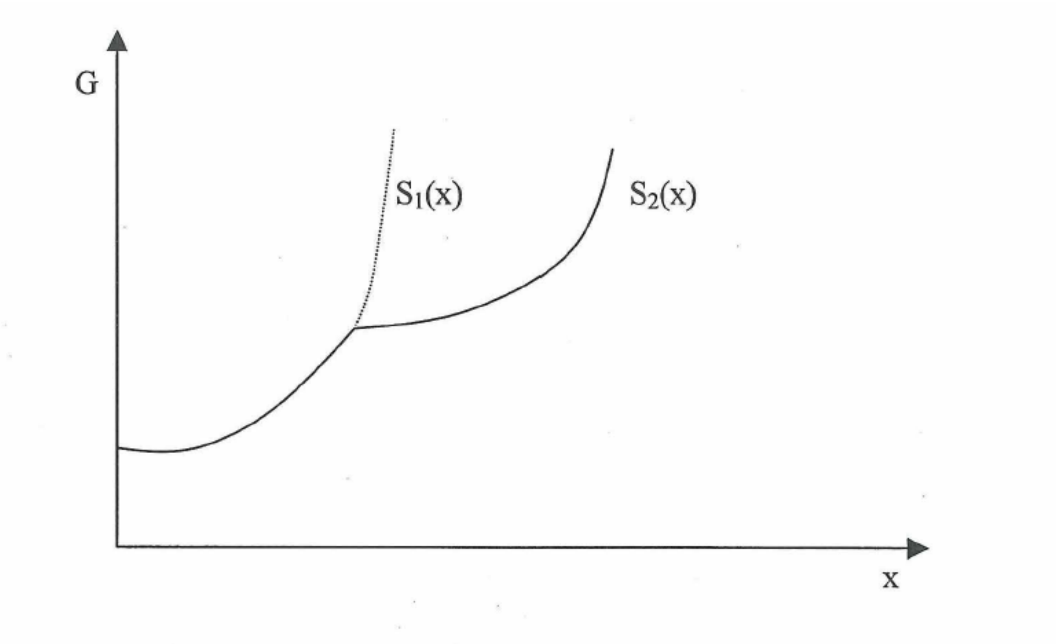
Dette er *Wardrops prinsipp*. Vi legger det også til grunn for rutevalget i et nettverk der trafikken langs de ulike rutene og på de ulike reiserelasjonene påvirker hverandre. De som reiser fra A til B vil altså bruke Wardrops prinsipp til å velge blant mulige ruter på sin reise, og det samme vil de som reiser fra A til C, de som reiser fra D til E osv. De samlede beslutningene vil bestemme hvor mye trafikk det vil bli på hver av veglenkene. Gitt beslutningene til de andre, vil det ikke være mulig for noen av de reisende å finne ruter som koster mindre enn den de har valgt. De vil altså ikke angre rutevalget i etterkant. Det er nettopp det likevekt betyr her – ingen vil ha grunn til å angre sine valg, derfor vil de holde fast ved valget også neste gang de gjør samme reise.

Wardrops prinsipp ligger til grunn for alle deterministiske rutevalgsmodeller der det er køer som kan påvirke kostnaden ved å bruke lenkene.

Med dette prinsippet vil trafikantene ikke ha noen spesiell preferanse for den ene ruta framfor den andre, ut over det at de velger den billigste. Derfor er det ikke noen etterspørsel etter spesielle ruter. Så lenge trafikkvolumet er lavt, vil alle velge billigste rute. Når trafikken øker slik at det oppstår kø der, vil noen finne veger utenom køen, dersom det er billigere. Dermed synker kostnaden på den opprinnelige ruta til det nivå hvor det er hipp som happ. Alt dette er reflektert i G i (17), slik at rutevalget ikke påvirker etterspørselsfunksjonen som sådan. Vi må altså tolke $S(x)$ i (18) som den reisekostnaden som fremkommer etter at rutevalgene er foretatt og brukerlikevekt er oppnådd.

Brukerlikevekt i rutevalget er altså forutsatt allerede når diagrammet i figur 7 tegnes opp. Den likevekten som oppnås når tilbud er lik etterspørsel i diagrammet, er en *annen* likevekt — så å si på et høyere nivå. Følgelig sier vi i transportøkonomien at etterspørselen etter reiser er et resultat av de reisendes valg av reisehyppighet, reisemål, transportmiddel og reisetidspunkt, mens tilbudet er et resultat av rutevalget.

La oss nå bruke den begrepsavklaringen vi har foretatt til å se en gang til på den systemavgrensningen som vi foretok da vi utledet volume-delay-funksjonen. Det er klart at hvis systemet bare omfatter en veglenke, kan den tas i bruk av forskjellige ruter og av forskjellige reiser (fra A til B, fra C til B osv.). Så lenge vi tar med all den inngående trafikken som input *x*, gjør ikke dette noen forskjell på våre konklusjoner i kapittel 1. Vi kan også utvide systemet til en hel rute, dersom ikke noen av lenkene på ruta tas i bruk av andre ruter og reiser. Dersom det bare finnes en rute mellom A og B, kan vi under samme forutsetning legger volume-delay-funksjonen til grunn for tilbudskurva etter reiser mellom A og B, slik vi har gjort i avsnitt 2.1 og 2.2. Hvis det imidlertid finns flere ruter, hvorav den ene er raskere og de øvrige først tas i bruk ved større volumer, vil tilbudskurva få et annet forløp enn vi har forutsatt til nå. Situasjonen kan fleks. være som i figur 8.



Figur 8

Når bare den i utgangspunktet billigste ruta er i bruk, blir tilbudskurva $S_1(x)$. Fra et visst nivå på *G* er det imidlertid like billig å bruke en annen rute, hvilket betyr at i det området hvor det er tilfelle, er vegkapasiteten større, og reisekostnadene stiger langsommere. $S_2(x)$ er konstruert for de to rutene til sammen når de er i brukerlikevekt. Den ene ruta vil være lengre, men tillate høyere fart enn den andre.

I de fleste virkelige situasjoner vil det ikke være mulig å angi en eksplisitt funksjonsform på tilbudskurva. Det er fordi den framkommer som summen av lenkekostnadene på den kostnadsminimale ruta ved ulike nivåer av etterspørselen på den reiserelasjonen vi betrakter. Men en etterspørselsendring på vår reiserelasjon vil kunne utløse endringer i rutevalget på andre reiserelasjoner, og dermed endringer i hvilke(n) rute som er den kostnadsminimale på vår reiserelasjon. Tilbudskurva vil i stedet kunne plottes ved gjentatte kjøringer av en rutevalgsmodell.[5]

[5] Vårt noe større område med homogene trafikkforhold vil imidlertid igjen være et unntak. Her er det ingen ubrukte ruter som trafikken kan ekspandere inn i. Tvertimot går det omtrent like treigt overalt. Vi ser ikke noe til hinder for å bruke den enkle volume-delayfunksjonen som utgangspunkt for tilbudskurva i dette tilfellet, men tilbudet er nå definert over reiser av gjennomsnittlig lengde i systemet

Vi har vært innom spesialtilfellet der det bare finnes en reiserelasjon og en rute, og det litt utvidede tilfellet med en reiserelasjon men mange ruter. I det generelle tilfellet består systemet av en mengde soner der biltrafikk kan oppstå og ende, og et nettverk av veglenker som forbinder nodene. Videre finnes det mange reiserelasjoner med start og sluttpunkt på ulike steder i systemet. Hver av dem har mange ulike ruter de kan bruke. Wardrops prinsipp vil også i dette tilfellet kunne brukes til å formulere framgangsmåter for å finne brukerlikevekt, slik at hver av lenkene vil ha en bestemt likevektstrafikk og dermed en bestemt lenkekostnad, og hver av reiserelasjonene vil ha entydige likevekts reisekostnader i form av summen av lenkekostnadene på den kostnadsminimale ruta.

Normalt regner vi med at reisekostnaden på en reiserelasjon ikke påvirkes av annen trafikk enn den som bruker en eller flere av de samme lenkene som er i bruk på *vår* reiserelasjon. Det betyr at vi ignorerer kryssende trafikk. I stedet må vi eventuelt ta hensyn til lyskryss og andre kryss, på- og avkjørsler på en grovere måte. Men det er faktisk mulig å formulere rutevalgsmodeller basert på Wardrops prinsipp også for det tilfellet at all trafikk påvirker reisekostnadene til all annen trafikk.

Gode historiske gjennomganger av rutevalgsteori og transportmodellering, kanskje med litt for mye vekt på amerikansk forskning, finnes i Boyce m.fl.(2005) og Boyce (2007).

---

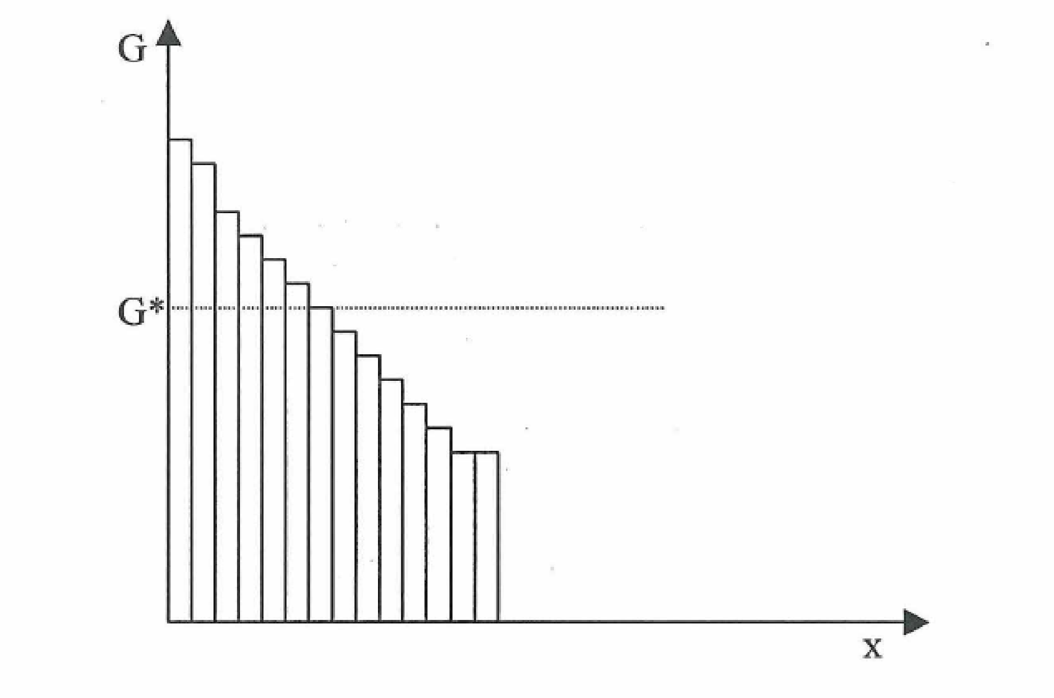
som helhet. Dette er basis for strategiske modeller, der markedet er et marked for kjøretøykilometer eller bilturer i sin største alminnelighet.

Det er naturligvis et empirisk spørsmål om trafikkforholdene i et område er så homogene at vi kan benytte den funksjonsforma vi har utledet, eller om den må modifiseres med bakgrunn i observasjoner av kjøretider og modellsimuleringer.

3 Samfunnsnytte i et bilreisemarked. Optimal vegavgift.

Vi holder nå fast på den definisjonen av en reise som vi ga i kapittel 2, og ser på et bilreisemarked, nemlig markedet for reiser med bil fra A til B i det lille tidsrommet ΔT. Vi forlater den spesielle funksjonsforma for tilbudskurven som vi utledet i pkt. 2.1, og kaller bare tilbudskurven $S(x)$. Vi regner med at den er stigende. Markedet er gjengitt i figur 7.

Hver reisende rekker bare en tur i det lille tidsrommet ΔT. Etterspørselskurva $D(G)$ er derfor en ordning av de potensielle reisende etter hva de er villig til å ofre av tid og penger på reisa. Dette er illustrert i figur 9.



Figur 9

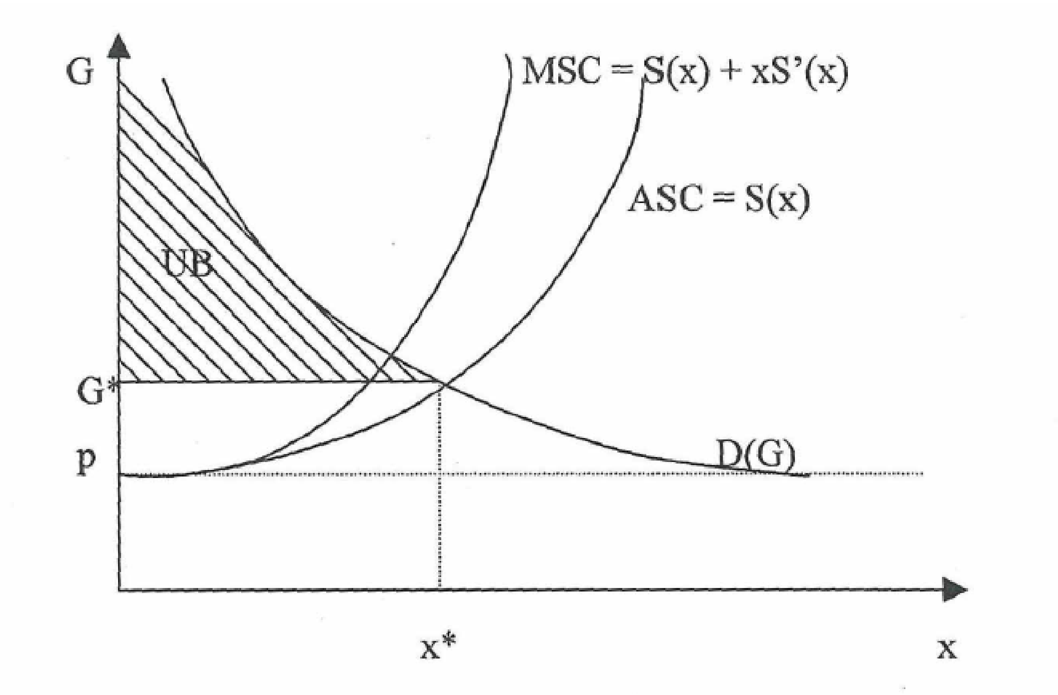
Overskuddet etter at bilistene har gjort de oppofrelser som reisa koster, er arealet under etterspørselskurva ned til G^*. Dette er en vesentlig bestanddel av samfunnsnytta i dette markedet. Vi antar at det er eneste bestanddel, dvs. vi ser bort fra miljøkostnader, eksterne ulykkeskostnader, bominnkrevingskostnader og det offentliges inntekter fra bompenger, kilometeravgifter o.l.

Den samlede samfunnsnytta W er da:

(19) $$W = UB = \int_{G^*}^{\infty} D(G)\,dG$$

Formelen sier at samfunnsnytta W i dette tilfellet er lik den nytta trafikantene får, brukernytten (UB står for "user benefit"). Integralet som definerer brukernytten pleier vi å kalle *konsumentoverskuddet*, fordi det uttrykker hvor mye konsumentene i dette markedet ville ha vært villig til å ofre på reisa ut over det de faktisk må ofre.

La oss nå anta at det er likevekt mellom tilbud og etterspørsel. Situasjonen er avbildet i figur 7, men vi gjentar den nedenfor i figur 10. Det finns ikke noe produsentoverskudd i dette markedet, for alle turer koster like mye. Samfunnets samlede kostnader i dette markedet er alltid $xS(x)$, uansett hvilken verdi x antar. En infinitesimal økning i antall reiser x øker enhetskostnaden pr. reise med $S'(x)$. Dette er den kostnaden den marginale bilisten sjøl opplever og tar hensyn til (hvis han har perfekt informasjon om trafikkforholdene i perioden ΔT). Samfunnets kostnader øker imidlertid til $S(x) + xS'(x)$ når denne bilisten har besluttet seg for å reise. Samfunnets marginalkostnad ved å reise er altså $xS'(x)$ større enn gjennomsnittskostnaden ved å reise.



Figur 10

De totale reisekostnadene i form av tid og penger for alle reisende er i figuren G^*x^* i likevekt. Brukernytta er det skraverte feltet *UB*.[6]

Økonomisk teori generelt skulle tilsi at samfunnets totale nytte blir størst når samfunnets marginalkostnad pr. reise er lik den marginale nytta ved å reise, målt i

[6] Linja *p* burde ha ligget lavere enn den gjør i figuren. Slik den nå ligger, er reisetida ved fri flyt lik null. Det har ingenting å si for forståelsen av diagrammet.

kroner, dvs. når samfunnets marginalkostnad pr. reise er lik det den siste bilisten er villig til å betale for reisa. La oss vise at det faktisk er tilfelle her.

Vi innfører en avgift *B* pr. reise. Vi vil prøve å sette avgifta slik at samfunnets nytte blir størst mulig. Når vi har innført en slik avgift, må vi imidlertid anerkjenne at de som får avgifta, nemlig myndighetene, vil kunne ha nytte og glede av det. Den totale samfunnsnytten blir da $W = UB + Bx$ i dette tilfellet. Vi vil altså maksimere brukernytten *UB* pluss inntektene fra avgifta, gitt at det skal være likevekt i markedet når avgifta *B* er pålagt.

Problemet blir:

(20) $$\underset{G,\,B}{Maks}\, W = UB + Bx = \int_G^{\infty} D(K)\,dK + BD(G) \quad \text{gitt } G = S\big(D(G)\big) + B$$

Problemet løses med Lagranges metode. Vi danner altså Lagrangefunksjonen *L* og setter de partiellderiverte av den til 0 for å finne førsteordensbetingelsene for maksimum. Lagrangefunksjonen er:

(21) $$L(G,B,\lambda) = \int_G^{\infty} D(K)\,dK + BD(G) - \lambda\Big(G - S\big(D(G)\big) - B\Big)$$

Førsteordensbetingelsene blir:

(22) $$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial G} &= -D(G) + BD'(G) - \lambda\big(1 - S'(x)D'(G)\big) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial B} &= D(G) + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Bruker vi den siste førsteordensbetingelsen til å sette inn for λ i den første, ordner og erstatter *D*(*G*) med *x*, får vi:

(23) $$B = xS'(x)$$

Samfunnsnytten blir altså størst når avgifta settes lik $xS'(x)$, slik at brukerne står overfor reisekostnaden $S(x) + xS'(x)$, dvs. samfunnets marginalkostnad ved å reise. Det er det vi skulle vise. (Vi bryr oss ikke om å sjekke andreordensbetingelsen, som er oppfylt).

Avgiftsinntektene (avgiftsprovenyet) blir da $x^2S'(x)$. (Vi ser bort fra innkrevingskostnader.)

Vi har funnet den optimale vegavgifta i dette bilreisemarkedet i det tilfellet, hvor vi hadde kø som en ekstern virkning, men så bort fra miljøvirkninger og ulykker. Vi kan merke oss at den optimale avgifta vil endre seg med både etterspørsels-kurva og tilbudskurva. Det framgår både av Figur 10 og likning (23). Avgifta vil altså være forskjellig på forskjellige tidspunkter i det samme vegsystemet, og forskjellig i forskjellige vegsystemer.

Vi merker oss også at det er etterspørselen og køforholdene *etter at den optimale avgifta er innført* som bestemmer avgiftens størrelse. Hvor store de eksterne kø-kostnadene er før det innføres en avgift, er irrelevant. I Figur 10 er det likevekts-situasjonen før avgift som avbildes. Likevektspunktet etter optimal avgift vil være der etterspørselskurva skjærer kurva MSC. Etterspørselen er da noe mindre enn før, og reisekostnaden er noe større, men på langt nær så stor som avstanden mellom MSC og ASC i det opprinnelige likevektspunktet.

Riktig avgift er altså spesifikk for det enkelte sted og det enkelte tidspunkt på dagen. Det finnes ikke noe avgiftsnivå som er riktig uavhengig av den konkrete situasjonen. Vi ser ofte at folk påstår at avgiften må være veldig høy ”for å ha noen virkning”. Andre mener at avgiftene fra Stockholm vil være omtrent riktige for byene i Norge også. Men vi har faktisk ingen praktisk erfaring med hva som er optimalt avgiftsnivå i den enkelte by før vi har innført det og studert de marginale eksterne køkostnadene i den nye situasjonen.

Det finnes to måter å løse dette problemet på. Enten har vi en god transportmodell og utleder optimal avgift fra eksperimenter med den, eller vi gjør eksperimenter i virkeligheten dvs. tester ulike avgiftsnivåer. Forhåndsberegningene med transport-modell i Stockholm viste seg å slå meget godt til i praksis. I Norge har vi for øyeblikket ingen tilsvarende god modell, bortsett fra kanskje i Oslo. Praktisk eksperimenterting er det vanskelig å vinne gehør for. Samtidig er det politiske problemer med en slik avgift, for det gjør en forskjell for de fleste hvordan gevinsten ved å innføre vegprising blir fordelt. Rimeligvis vil folk gjerne sette betingelser for hvordan avgiftsprovenyet skal brukes før de går med på det. På den andre sida er det fullt ut mulig å sløse vekk mye av gevinsten dersom inntektene brukes på dårlige prosjekter, eller dersom innkrevingsmåten er lite effektiv.

Minken (2005) og Aas m.fl. (2009) drøfter vegprisingens teori, praktiske erfaringer og implementeringsstrategier.

4 Flaskehalsproblemer

4.1 En flaskehals

I dette kapitlet vil vi innføre en flaskehals i det systemet vi ser på, og finne den riktige vegavgiften i det tilfellet. Flaskehalsen kan være et vegkryss, en endring i vegbredda eller i antall filer, eller en annen type hindring. Framstillinga er sterkt inspirert av Yang og Huang (1998), men vi behandler ikke problemet i en nettverkssammenheng, slik de gjør.

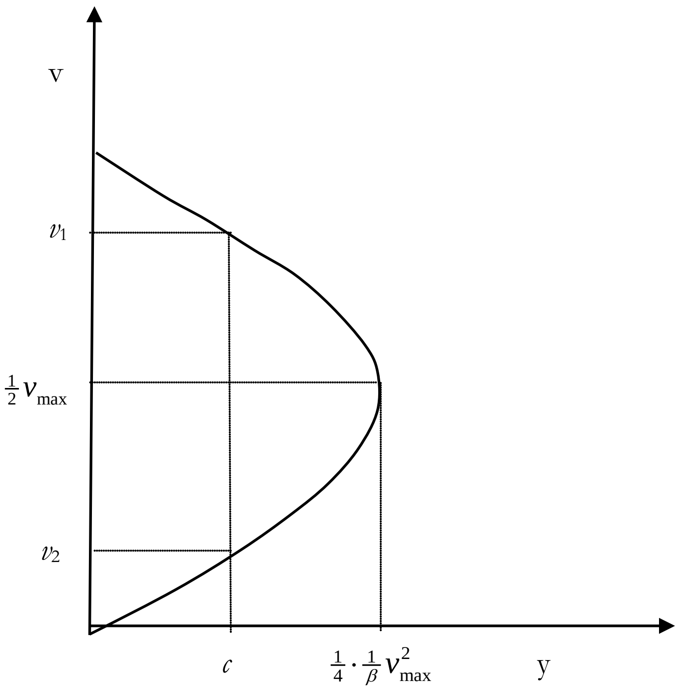
Som vi var inne på i kapittel 1, spiller lengda av systemet, *d*, en svært underordnet rolle i vår framstilling av trafikkteorien til nå. Parameteren *d* kommer bare inn når vi skal regne om fra den konstante marsjfarta i systemet, *v*, til tida *t*. I bunn og grunn har vi utelatt den geografiske eller romslige dimensjonen fra våre problemstillinger.

Denne dimensjonen kommer først for alvor inn i bildet når vi anerkjenner at systemet ikke er seg sjøl likt overalt. Det gjør vi nå ved å anta at kapasiteten (maksimal output pr. tidsenhet) ikke er den samme overalt i systemet. Det vil da vise seg (kanskje noe overraskende) at lengda *d* blir langt mer vesentlig enn før.

La kapasiteten gjennom flaskehalsen være *c* og kapasiteten til systemet forøvrig være c_{max}. Uten tap av generalitet kan vi legge flaskehalsen til utgangen av systemet. Vi ser på en situasjon der input i systemet, *x*, opprinnelig overstiger *c*, men er mindre enn c_{max}. En kø vil bygge seg opp foran flaskehalsen. Vi antar at etterspørselen etter reiser, *x*, er en avtakende funksjon av generaliserte kostnader, som øker med køen foran flaskehalsen. Når køen har nådd en viss lengde, er generaliserte reisekostnader blitt så høye at etterspørselen *x* har kommet ned på et nivå lik *c*. Vi har da likevekt mellom tilbud og etterspørsel. Det er en slik likevektstilstand som legges til grunn for analysen. Den kan oppnås over lengre tidsrom hver dag hvis de reisende i tidsrommet ΔT og de nærmeste tidrommene har riktige forventninger om køens lengde i hvert av tidsrommene.

Vi bruker nå ordet "kø" til å betegne en rekke av biler som står *nesten stille* og venter på tur til å bli "behandlet" i flaskehalsen, dvs. få muligheten til å kjøre gjennom den. Slik vi nå bruker ordet "kø", trenger vi et annet ord for de vanlige køproblemene, dvs. tilstanden der bilene forsinker hverandre uten å stoppe helt. På engelsk skiller vi mellom "queue" og "congestion". På norsk kunne vi skille mellom kø og trengsel, mellom kø og kapasitetsproblemer e.l. De reisende opplever altså trengsel i systemet fram til det punkt der køen begynner, og deretter kø.

Det finns en del empirisk belegg for at farta til bilene i et overbelastet system fordeler seg i et histogram med to klare toppunkter – ett nær null og et annet mye større. Hvis vi nå ser tilbake på Figur 3 – som vi tar inn igjen her som Figur 11 – kan vi forklare dette i vår modell. Fram til trafikknivået *c* følges den vanlige speed-flowkurva. Når trafikken blir *c*, vil framleis en del av den – den som ikke har kommet fram til der køen begynner – oppleve farta v_1, mens den trafikken som står i kø foran flaskehalsen vil oppleve den langt lavere farta v_2. Hvis trafikken er større enn c, vil farta i øvre del av systemet være lavere enn v_1, men på grunn av flaskehalsen vil køen da bygge seg opp. Vi har antatt at denne ulikevektssituasjonen ikke lenger forekommer på det tidspunktet vi studerer systemet. Trafikken inn og ut av veglenka er altså c.



Figur 11

La kølengda være L. Reisetida gjennom systemet blir:

(24) $$t = \frac{d-L}{v_1} + \frac{L}{v_2} = \frac{d}{v_1} + \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)L = \frac{d}{v_1} + \mu$$

Siste ledd i det andre uttrykket for t i (24) representerer den tida som rett og slett kastes bort til køståing på grunn av flaskehalsen. Vi kaller dette tidstapet μ. Vi skal se hvordan vi kan anslå det.

La oss si at det empirisk er mulig å anslå hvor stor del av systemet som er preget av stillestående køer, dvs. at vi kan anslå $\alpha = L/d$. La oss dessuten anta at den køfunksjonen vi fant i avsnitt 1.4.2 gir et riktig bilde av trengselen. Vi kan da regne om formel (14) fra en formel for t til en formel for v. I den forbindelsen setter vi output, som i formel (14) er y, til c, kapasiteten på flaskehalsen. Lenke-kapasiteten c i formel (14) kaller vi nå $c_{\max}$, altså kapasiteten dersom det ikke fantes noen flaskehals. Vi får:

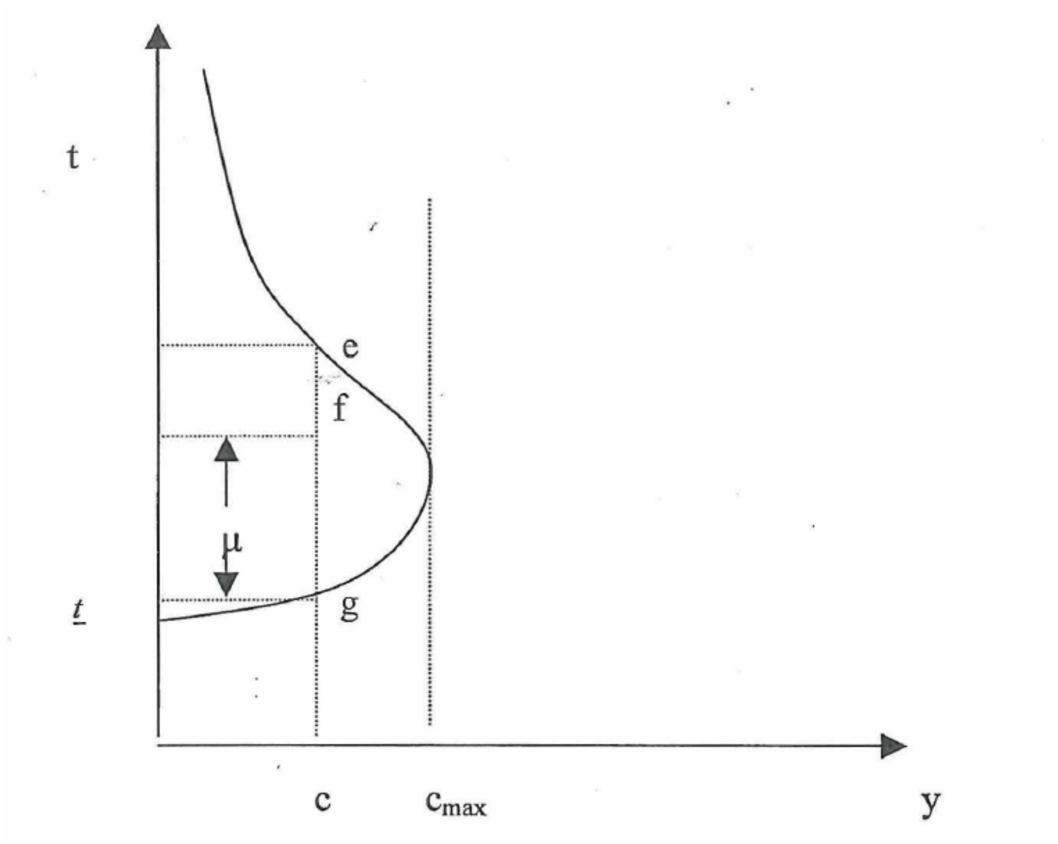
(25) $$v = \tfrac{1}{2}v_{\max}\left(\frac{c}{c_{\max}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{c_{\max}}}\right)^{-1}$$

Bruker vi den negative rota i formelen, finner vi et uttrykk for v_1, og bruker vi den positive, finner vi v_2. Når det gjelder v_1 er det opplagt: Farta ved trafikkvolum c ifølge den ordinære køfunksjonen er jo nettopp v_1, så det vil være farta på den delen av veglenka der alt går normalt. Men i det øyeblikket bilen kommer fram til den nesten stillestående køen foran flaskehalsen, vil farta bli vesentlig redusert. Farta på denne delen av veglenka, altså på en andel L/d av veglenka, er vesentlig mindre, nemlig v_2. Vi veit ennå ikke om v_2 er den farta som svarer til den positive rota, men vi vil anta det, og skal se at det gir en rimelig tolkning av hva som foregår.

Vi kan da finne et eksplisitt og empirisk beregnbart uttrykk for μ, dvs. hvor mye tid som kastes bort i kø på grunn av flaskehalsen i denne likevektssituasjonen:

(26)
$$\mu = \alpha d\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right) = \alpha d\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{c}{c_{\max}}}\right)}{\frac{1}{2}v_{\max}\left(\frac{c}{c_{\max}}\right)} - \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{c_{\max}}}\right)}{\frac{1}{2}v_{\max}\left(\frac{c}{c_{\max}}\right)}\right)$$
$$= 4\alpha d\cdot v_{\max}^{-1}\left(\frac{c_{\max}}{c}\right)\sqrt{1-\frac{c}{c_{\max}}}$$

For å vise køforsinkelsen μ grafisk og fullføre tolkningen av hvordan flaskehalsen gir opphav til en likevekt med en kø av en bestemt lengde foran flaskehalsen, beveger vi oss fra speed-flowkurva i Figur 11, der hastigheten er på den vertikale aksen, til køfunksjonen i Figur 12, der reisetida over veglenka er på den vertikale aksen. Dette er det samme som vi gjorde ved overgangen fra Figur 3 til Figur 5, bortsett fra at vi nå også har en flaskehals.



Figur 12

For små trafikkvolumer er reisetida gitt ved den vanlige nedre delen av volume-delaykurva, men ved $y = c$ beveger vi oss rett oppover langs linja gfe etterhvert som køen blir en større og større del av hele systemets lengde. Punktet f representerer en bestemt $\alpha = L/d$ med motsvarende køtid μ. Punktet e representerer $\alpha = 1$, dvs. den lengste køen som er forenlig med en stasjonærtilstand i systemet. Verken den delen av volume-delaykurva som ligger til høyre for linja c (mellom c og c_{max}) eller den som ligger over e er mulige tilpasningspunkter i dette tilfellet.

Så lenge det er snakk om likevekt i systemet, må vi altså tolke hele den øvre, tilbakebøyde delen av volume-delaykurva som ikke-eksisterende, bortsett fra det ene punktet e, som utgjør en virkelig likevektstilstand der hele veglenka er fylt av en nesten stillestående kø foran flaskehalsen. Blir trafikken inn på lenka større i denne situasjonen, vil køen forplante seg til lenka foran, hvilket vi antar ikke er forenlig med likevekt.

På den andre sida vil hele linja gfe representere virkelige mulige likevektstilstander når vi har en flaskehals. Den virkelige volume-delayfunksjonen i dette tilfellet er altså svakt stigende til c, deretter loddrett *til* $t = e$.

Om kapasiteten ved flaskehalsen varierer over tid, for eksempel på grunn av varierende trafikk på kryssende veger eller påkjøringsramper, vil naturligvis punktet e bevege seg langsmed den øvre, ”imaginære” delen av volume-delay-funksjonen. Slik sett er nesten alle punkter ovenfor og til venstre for volum-delay-funksjonen mulige punkter som kan forekomme i praksis.

Denne tolkningen av Figur 12 gir mening til v_2 som den hastigheten som framkommer om vi bruker det positive fortegnet i (25), altså den lavest mulige likevektshastigheten når det eksisterer en flaskehals. Og det styrker en tolkning av (26) som den delen av køforsinkelsene som skyldes en opphopning foran flaskehalsen.

I et skinnegående system vil stopptida på stasjonene ofte begrense den minste tidsavstanden mellom togene, eller m.a.o. det største antall tog pr. tidsenhet. Maksimal kapasitet er altså den inverse av stopptida. Dette gir en tilsvarende situasjon som flaskehalsen i vegsystemet. Forskjellen er at antall tog som settes opp, reguleres slik at det ikke forekommer kø ved flaskehalsen.

4.2 Optimal vegavgift når det eksisterer en flaskehals

Vi skal finne optimal vegavgift når det eksisterer en flaskehals. Etterspørselen er $x = D(G)$. Vi forutsetter at $G > 0$, og at uansett hvor stor G måtte bli, vil det finnes etterspørsel, altså $D(G) > 0$. Dette er matematisk sett nyttige forutsetninger, og det vil heller ikke oppstå praktiske tilfeller hvor vi trenger å vurdere det motsatte.

Flaskehalsen har kapasitet c, slik at dersom vi skal ha likevekt i systemet, må $D(G) \leq c$. Vi lar $S(x)$ være den samme gjennomsnittskostnadskurva som før, dvs. den som framkommer når vi ikke har noen flaskehalsproblemer. Men vi åpner nå for at G kunne være større enn $S(x)$ pluss B. Det vil skje når det eksisterer en stillestående eller nesten stillestående kø foran flaskehalsen. Denne stillestående køen har en viss lengde, som vi skal anta utgjør en andel $(1 - \beta)$ av hele lenka eller transportstrekningen. β er mellom 0 og 1.[7] Når $\beta = 0$ er hele reisestrekningen fylt av en nærmest stillestående kø, mens når $\beta = 1$ finnes det ingen slik kø. Den kilometeravhengige kostnaden ved å reise på *resten* av strekningen, der den vanlige strekningsvise køen eksisterer, er altså $\beta S(D(G))$. Kostnaden ved *hele* reisa er $B + \beta S(D(G)) + (1 - \beta)T$, der T er den kilometeravhengige kostnaden dersom hele strekningen skulle bestå av en nærmest stillestående kø. Vi antar at $T \gg S(D)(G)$, dvs. at det alltid, uansett hvor mye trafikk det er, går mye seinere i køen foran flaskehalsen enn i køen på resten av strekningen.

I stedet for vårt maksimeringsproblem (20), har vi nå et Kuhn-Tucker-problem, dvs. at bibetingelsene er gitt i form av ulikheter. Dessuten er alle variablene G, B og β ikke-negative. Vedlegg 1 behandler denne typen problemer noe nærmere. Maksimeringsproblemet blir:

[7] Forholdet mellom denne β og variabelen α i avsnitt 4.1, er at $\beta = 1 - \alpha$.. Variabelskiftet skyldes en teknisk detalj.

$$\underset{G,B,\beta}{Maks}\, W = UB + Bx = \int_{G}^{\infty} D(K)\,dK + BD(G)$$

gitt

(27)

$$\begin{array}{llr} (1) & \beta S\left(D(G)\right) + (1-\beta)T + B \le G & (\lambda_1) \\ (2) & D(G) \le c & (\lambda_2) \\ (3) & \beta \le 1 & (\lambda_3) \end{array}$$

Problemet er formulert som et maksimeringsproblem med ulikheter som vender mot venstre. Dette er for å få problemet på en form som tilsvarer setning 4.25 i Sydsæter. Det gir oss sikkerhet for at Lagrangemultiplikatorene er større enn null.

Lagrangefunksjonen blir:

(28)

$$\begin{aligned} & L(G,B,\beta,\boldsymbol{\lambda}) = \\ & \int_{G}^{\infty} D(K)\,dK + BD(G) - \lambda_1\left(\beta S\left(D(G)\right) + (1-\beta)T + B - G\right) \\ & -\lambda_2\left(D(G) - c\right) - \lambda_3(\beta - 1) \end{aligned}$$

Vi kan som sagt anta at *G* og *D*(*G*) alltid er større enn null. Kuhn-Tuckerbetingelsene er da:

(29)

$$\begin{array}{ll} \text{(KT1)} & \dfrac{\partial L}{\partial B} = D(G) - \lambda_1 \le 0 \ (= 0 \text{ for } B > 0) \\ \text{(KT2)} & \dfrac{\partial L}{\partial G} = -D(G) + BD'(G) - \lambda_1\left(\beta S'(x)\cdot D'(G) - 1\right) - \lambda_2 D'(G) = 0 \\ \text{(KT3)} & \dfrac{\partial L}{\partial \beta} = -\lambda_1\left(S\left(D(G)\right) - T\right) - \lambda_3 \le 0 \ \ (= 0 \text{ for } \beta > 0) \end{array}$$

$$\lambda_1 \ge 0 \ (= 0 \text{ for } \beta S\left(D(G)\right) + (1-\beta)T + B < G)$$

$$\lambda_2 \ge 0 \ (= 0 \text{ for } D(G) < c)$$

$$\lambda_3 \ge 0 \ (= 0 \text{ for } \beta < 1)$$

Vi merker oss først at bibetingelse (1) må være oppfylt med likhet. Ellers ville jo λ_1 vært 0, og da ville KT1 motsagt våre forutsetninger. Modellen kan altså ikke oppføre seg som om det skulle være flere slaga kostnader i *G* enn de vi eksplitt tar hensyn til.

Hvis det nå er optimalt å innkreve en avgift *B*, har vi likhetstegn i KT1, og dermed at $\lambda_1 = D(G)$. Hvis vi løser KT2 for B, vil vi se at det faktisk er tilfelle. Vi får nemlig (med litt forenklet notasjon):

$$B = \frac{D - \lambda_1}{D'} + \left(\lambda_1 \beta S' + \lambda_2\right)$$

Her er første ledd minst null, siden *D´* er negativ og *D* i høyden lik λ_1 ifølge KT1. Ingen lambdaer kan være negative, og det kan heller ikke β. *S´* er heller ikke negativ. Parentesen er altså også minst lik 0.

Anta nå at det *ikke* skal innkreves noen avgift, dvs. optimal avgift er $B = 0$. Det krever at parentesen er null og at $\lambda_1 = D(G)$. Anta deretter at $B > 0$. Også da er $\lambda_1 = D(G)$, denne gangen i følge KT 1. Vi fastslår derfor at $\lambda_1 = D(G)$.

Vi setter inn for λ_1 i KT2 og KT3 og ordner. Dessuten skriver vi opp bibetingelse (1) på nytt, denne gangen med ekte likhet, som vi så at det måtte være. Med en litt forenklet notasjon får vi:

(30)

(KT2) $B = \beta D S' + \lambda_2$

(KT3) $D(T - S) - \lambda_3 \le 0 \quad (= 0 \text{ for } \beta > 0)$

(1) $\beta S + (1 - \beta) T + B = G$

Dette er utgangspunktet for å drøfte de gjenværende mulige løsningene på problemet, nemlig alle mulige kombinasjoner av likhet og ekte ulikhet i bibetingelsene (2) og (3).

A. Ingen av bibetingelsene (2) eller (3) er bindende

Her er $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Som vi ser av likning (30), skal vi ha $\lambda_3 \ge D(T - S)$, men med $\lambda_3 = 0$ og T mye større enn S er dette umulig. Så dette tilfellet gir ingen løsningskandidat.

B. Bare (2), men ikke (3) er bindende

Her er $\lambda_3 = 0$. På samme måte som i tilfelle A gir det en motsigelse, fordi vi må ha $\lambda_3 \ge D(T - S)$. Så dette tilfellet gir heller ingen løsningskandidat.

C. Bare (3), men ikke (2) er bindende

Flaskehalsen er her ikke noen hindring, det er uaktuelt med en kø foran flaskehalsen, og framkommeligheten vil aldri bli så dårlig på hele strekningen som foran en eventuell flaskehals. Dette burde altså bli det ordinære køprisingstilfellet, og det viser seg å stemme.

Vi har $\lambda_2 = 0$, $\beta = 1$ og $D < c$. Vi merker oss at $\beta = 1$ impliserer $\beta > 0$. Våre tre likninger blir da

$$\text{(KT2)} \quad B = DS'$$
$$\text{(KT3)} \quad \lambda_3 = D(T - S)$$
$$\text{(1)} \quad S + B = G$$

Sammen med $\beta = 1$ er dette fire likninger til å beregne G, B, β og λ_4. (KT2) og (1) er to likninger til å beregne G og B, og innsetting i (KT3) gir λ_3. (KT2) er nå den vanlige regelen for køprising, nemlig å sette avgifta lik den marginale kostnadsøkningen (S') som den enkelte bilreisa påfører alle de andre (D).

D. Bibetingelsene (2) og (3) er bindende

Vi har $\beta = 1$ og $D = c$. Bruker vi disse opplysningene, får vi først ved å invertere $D = c$ at $G = D^{-1}(c)$. Videre får vi:

$$\text{(KT2)} \quad B = cS'(c) + \lambda_2$$
$$\text{(KT3)} \quad \lambda_3 = c\left(T - S(c)\right)$$
$$\text{(1)} \quad S(c) + B = G$$

Ved innsetting av $D^{-1}(c)$ for G følger avgifta B av (1). Ifølge (1) skal avgifta ikke beregnes som den marginale køkostnaden som påføres andre, men som det påslaget som trengs på de ordinære kostnadene for å få etterspørselen ned på nivået c. Samtidig sier (KT2) at det finnes en alternativ tolkning av B. Ifølge den er B nettopp den marginale eksterne køkostnaden, men med et tillegg som er lik skyggekostnaden på flaskehalskapasiteten. I tillegg til den vanlige køavgifta $cS'(c)$ skal vi altså legge på en avgift som presser etterspørselen ned til c, slik at det ikke oppstår noen kø ved flaskehalsen.

Sagt med andre ord: Hvis dette er løsningen når flaskehalsen er en bindende restriksjon, skal vi bruke avgifter, ikke kø ved flaskehalsen, til å redusere etterspørselen til nivået c. Den stillestående køen skal prises helt vekk.

Modellen løses slik: Vi finner først G av $G = D^{-1}(c)$. Ved å sette inn for G i (1) får vi følgende eksplisitte løsning for B:

$$B = D^{-1}(c) - S(c)$$

Dette bruker vi i (KT2) for å finne løsningen for λ_2:

$$\lambda_2 = D^{-1}(c) - S(c) - cS'(c)$$

$\beta = 1$ og $\lambda_3 = c\left(T - S(c)\right)$ er allerede eksplisitte uttrykk for disse variablene. Men det vil være nødvendig å kontrollere at λ_2 og λ_3 er større enn null, ellers er tilfelle D ingen løsningskandidat.

4.2.1 Oppsummeringsvis

Alt det ikke er optimalt med stillestående kø foran en flaskehals som ikke er bindende, altså slett ingen flaskehals, er ikke forbausende. Litt mer interessant er det at heller ikke når flaskehalsen er bindende, er det optimalt med noen slags stillestående kø. Det viser seg at tilfellet der vi åpner for den muligheten (tilfelle B), ikke kan gi noe optimum i vår modell. De to eneste tilfellene som kan gi optimal løsning, er tilfelle C, der det ikke finnes noen flaskehals og vi har vanlig marginalkostnadsprising, og tilfelle D, der det finnes en flaskehals og avgifta skal settes slik at det ikke blir noen flaskehalskø.

Vi kan trekke den konklusjonen at køer foran flaskehalser skal fjernes fullstendig gjennom avgifter, mens vanlig trengsel, slik den tar seg uttrykk i den stigende gjennomsnittskostnaden for reiser, ikke skal fjernes fullstendig i optimum. Men vi bør ikke se bort fra at en virkelig trafikksituasjon kan være mer komplisert enn den modellen der dette resultatet framkommer. Sannsynligvis har vi ikke mulighet til å utforme et avgiftssystem med en avgift tilsvarende den eksterne kostnaden på hver eneste lenke i transportsystemet. I stedet vil avgifta i beste fall tilsvare gjennomsnittlige eksterne kostnader i et større område. Det er fullt mulig at det skal stå igjen noen flaskehalskøer i et slikt nestbesteregime. Det er til og med mulig at det kan være optimalt å stenge noen lenker fullstendig (Braess' paradoks), derfor kan det vel i visse tilfeller være optimalt å ”parkere” noen biler i en stillestående kø til trafikken er redusert så mye at disse bilene ikke lenger gjør noen skade andre steder i systemet. Vi gjetter at det noen ganger kan være tilfelle, men vi veit det ikke. Uansett kan vi ikke bruke regelen om å fjerne alle stillestående køer på en fullstendig firkantet måte.

Flaskehalser kan naturligvis også fjernes gjennom utbygging. Om dette gir et bedre resultat enn avgifter, avhenger av utbyggingskostnaden og hvor mye c egentlig øker.

La oss nå tenke oss en situasjon uten en avgift som fjerner flaskehalskøen. Dette er en likevektssituasjon hvis folk bevisst velger en rute eller en transportmåte som dag etter dag fører til at de står i samme køen. De veit hva de får, og de angrer seg ikke så lenge ingen av de andre angrer seg. De kan irritere seg, men de anser likevel at dette er det beste alternativet de har. La oss videre anta at alle trafikantene har samme tidsverdi. Om vi nå innfører en avgift som fjerner hele denne køen, har vi erstattet en tidskostnad av en bestemt størrelse med en pengekostnad av akkurat samme størrelse.[8] Dette er en nøkkel til å forstå hvorfor alle stillestående køer skal prises vekk. For trafikantene spiller det ingen rolle om de betaler et visst beløp i avgift eller påtar seg den samme kostnaden i form av tidstap i kø. Men mens det samme beløpet som trafikantene betaler i avgift, dukker opp et annet sted i det samfunnsøkonomiske regnestykket som en gevinst for det offentlige, er det ingen tilsvarende motpost til tidskostnaden. Det den ene taper i tid, er et tap for samfunnet uten noen motpost, men det den ene betaler i penger, er det noen andre som får. Hvis denne transaksjonen fører til mer fornuftig atferd fra begge parters side, blir det en netto gevinst.

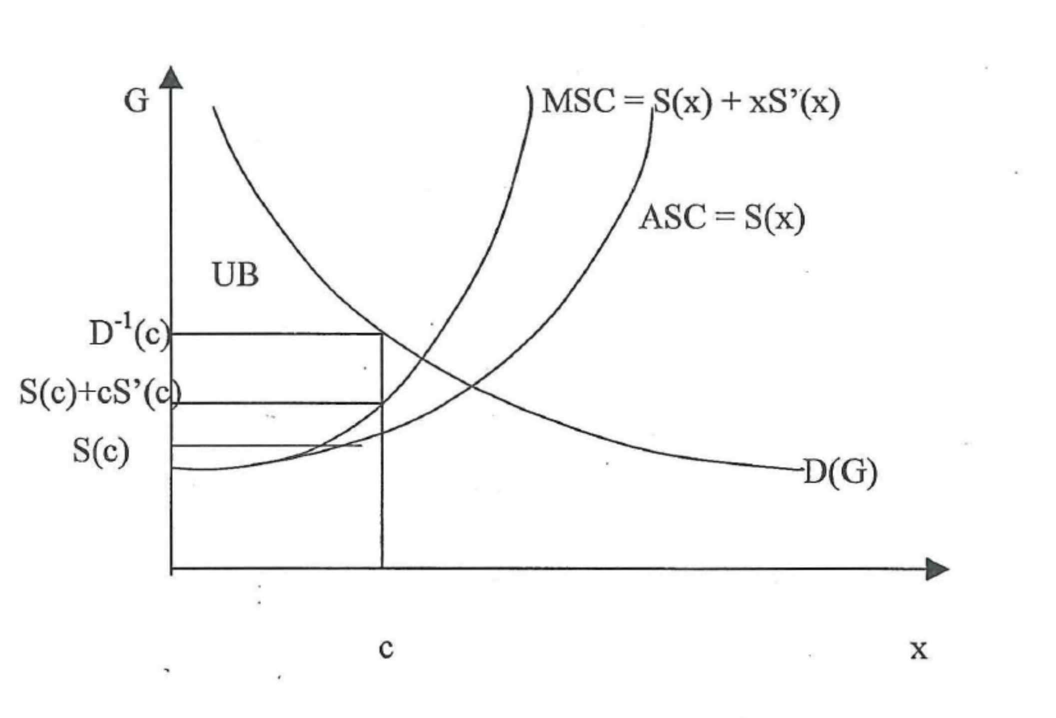
[8] Hvis størrelsene ikke var like, ville de ikke ha gitt samme likevekts trafikkvolum gjennom flaskehalsaen.

Med henvisning til formel (26) og Figur 12 kan vi konkludere vår drøfting med at dersom alle har tidsverdien ω, er

(31) $$\lambda_2 = \omega\mu$$

Det ekstra påslaget i trengselsavgifta skal altså være lik tidskostnaden ved å stå i den køen foran flaskehalsen som er forenlig med likevekt. Relasjon (31) gir sammen med (26) en praktisk måte å beregne dette påslaget på. Riktignok er vårt eksempel stilisert, men hvis vårt system er en enkel korridor, er det ikke umulig at disse beregningene kan gi rimelige resultater. Når vi må regne med et helt nettverk, er det derimot nødvendig med en fullstendig analyse av trafikknettverket i tråd med framstillingen i Yang og Huang (1998).

Figur 13 illustrerer problemet vi har drøftet. Vi ser at sjøl om det pålegges en avgift $cS'(c)$ vil det fortsatt være køkostnader $D^{-1}(c) - S(c) - cS'(c)$ ved flaskehalsen. For å fjerne køen, må en avgift lik disse køkostnadene legges på i tillegg. Vi ser også at hvis MSC-kurven hadde vært brattere og ligget lenger til venstre, ville det oppstå likevekt uten kø ved flaskehalsen, og den spesielle køavgifta ville falle vekk.



Figur 13

*

Slagordmessig: Tida du somler vekk i en kø som står stille, får du aldri igjen. Den er vekk for alltid. Stillestående køer kan fjernes med køprising. Avgifta du betaler når vi har innført køprising, kan du få igjen i form av bedre helsestell, skoler og andre offentlige tjenester.

5 Køprising – en kort oversikt[9]

5.1 Innledning

Økonomer har gått inn for køprising i 50 år, men har stort sett snakket for døve ører. Det er kanskje ikke så rart: En ide som er vanskelig å formidle uten å gjøre bruk av et abstrakt diagram (med underliggende tvilsomme forutsetninger), har små muligheter i praktisk politikk. Det er nærliggende for folk å anta at det bare dreier seg om et nytt forsøk på å bruke bilistene som melkeku. Både høyresida og venstresida har framholdt at køprising er en usosial avgift som rammer lavinntektsgruppene spesielt hardt, i tillegg til de som ikke sjøl kan velge arbeidstid og de som må kjøre barn til barnehagen. Ikke noe av dette er innvendinger som bare kan prates vekk.

Men mens årene går, vokser bilkøene. Det påstås at trafikken i indre del av London gikk langsommere på begynnelsen av dette årtusen enn i Victoriatida. Det rammet både bilene og bussene. Og i visse byer i Asia skal det visstnok være populært å installere toaletter i bilene, ettersom en må regne med 2-3 timer for å komme inn og ut av byen. Her til lands kommer vi så smått etter: Strekningen fra Asker til Oslo sentrum, som tar 18 minutter på sein kveldstid, kan lett ta en time i rushtida.[10] Det er stigende forståelse, i alle fall i Osloområdet, for at vegbygging bare betyr en midlertidig lettelse. Oslopakke 1 utsatte kanskje problemene med 10 år. Man kommer til å oppdage at heller ikke kollektivutbygging er noe sesam-sesam, i alle fall ikke med det utbyggingsprogrammet som er lagt i Oslopakke 2 og 3. Mye bra kan oppnås med fornuftige infrastrukturinvesteringer, men valget, i Oslo og kanskje 2-3 andre norske byer, kommer før eller siden til å stå mellom køprising og restriksjoner på bilbruken.

5.2 London og Stockholm

Det merkelige har skjedd at da London innførte en primitiv form for køprising i 2003, smuldret en stor del av motstanden bort. Ordføreren, Ken Livingstone, som hadde drevet fram ordningen, blei gjenvalgt til tross for et katastrofevalg for Labour ellers, og sjøl om både avgiften seinere er økt vesentlig og innkrevings-området er utvidet, har den nye konservative ordføreren beholdt ordningen.

Noe tilsvarende skjedde i Stockholm i 2006, hvor trengselsavgift blei innført som et halvårlig forsøk. Bakgrunnen for forsøket var en avtale mellom Vänsterpartiet, De Gröna og Sosialdemokratene noen år tidligere. Med en avgift på 20 kroner i den verste rushtida og 10 kroner midt på dagen sank trafikken over bomsnittet

[9] Dette kapitlet er tidligere offentliggjort i skriftserien Røst nr.1 2011.

[10] Prosamrapport 165, www.prosam.org.

med drøye 20 prosent.[11] Trafikken innafor ringen sank med 15 prosent, og til og med utafor ringen sank trafikken. Ekstra kjøretid i forhold til kjøretiden når det ikke er kø, ble redusert med en tredjedel i morgenrushet og med 50 prosent om ettermiddagen. Dette ga også mye bedre pålitelighet, dvs. mindre variasjon i kjøretiden fra dag til dag. CO_2-utslippet i indre by ble redusert med 14 prosent, og den lokale luftforurensningen i indre by ble redusert med 10-14 prosent, med unntak av NO_x, som bare ble redusert med 8.5 prosent. Men ettersom reduksjonen i lokale utslipp skjedde i de strøkene som har den største befolkningstettheten, blei de positive helseeffektene tre ganger større enn om forurensningen hadde blitt redusert like mye over alt. Trafikkulykkene innenfor ringen antas å ha gått ned med 5-10 prosent.

Tilstrekkelig mange satte pris på den økte framkommeligheten og det merkbart mer trivelige bymiljøet til at det blei flertall ved den etterfølgende folkeavstemningen i Stockholm kommune for å gjøre ordningen permanent. Den borgerlige regjeringen innførte da også ordningen på permanent basis et halvt år seinere, og både trafikkvirkningen og oppslutningen har stort sett holdt seg siden.

5.3 Norge

Erfaringene fra Stockholm har hatt innvirkning på opinionen i Norge, særlig på venstresida. Men faktisk er nå NHO positiv til køprising, mens NAF i det minste er interessert i å diskutere det. Høyre og FrP holder fast ved sin motstand, og det blokkerer for forsøk i Oslo, siden det ligger til grunn for avtalen om Oslopakke 3.

Jeg betrakter køprising, vegprising og trengselsavgift som synonyme begreper. Det dreier seg alt sammen om en avgift som har til hensikt å få trafikantene til å ta inn over seg de (eksterne) kostnader de påfører andre bilister i form av økt kø og bymiljøet i form av økte utslipp, som jo følger med stillestående og nesten stillestående køer. Det ligger i sakas natur at en slik avgift må være avhengig av hvor og når man kjører, og at den vil påvirke bilistene til å velge andre tidspunkter, andre destinasjoner, andre reisemåter eller i det hele tatt finne på noe annet. Sjøl om mange ikke har noe reelt valg, er det en relativt stor prosent som faktisk har alternativer, og det skal ikke så veldig mange til før det gjør en stor forskjell på framkommeligheten.

Bompenger, derimot, har til hensikt å finansiere ny infrastruktur. Bompenger er hjemlet i veglova. Lovendringer i løpet av nittiåra åpner for tidsdifferensierte satser på bommene og bruk av bompengeinntektene til kollektivtiltak (og nå seinest også til drift av kollektivsystemet). Vegprising er hjemlet i en annen lov, vegtrafikklova. Bestemmelsene om vegprising kom inn i lova i 2001. De er hittil ikke tatt i bruk, men siden den mest aktuelle forma for vegprising er tidsdifferensierte satser på en bomring, er det i grunnen hipp som happ om man bruker veglova eller vegtrafikklova. Begge ordninger kan tjene både finansiering og trafikkdemping, så den vesentligste forskjellen er i grunnen at bompenger kan

[11] Siden avgift blir innkrevd både ved passering inn og ut, tilsvarer det 40 kroner ved innkreving bare på veg inn. Ved sammenlikning med takstene på bomringer i Norge må man ta hensyn til at man i Norge har ulike rabattordninger, slik at for eksempel i Oslo koster en passering drøyt 20 kroner for de fleste. Vi snakker altså om rundt det dobbelte i rushtida i Stockholm, men desto mindre på andre tidspunkter.

innføres også der hvor det ikke tjener noe fornuftig trafikkregulerende formål. Og det skjer som kjent i stor omfatning. Fra et samfunnsøkonomisk synspunkt er det helt fornuftig å være motstander av bompenger i de aller fleste tilfeller, og tilhenger av vegprising i de største byene – også dersom det formelt skulle dreie seg om bompenger.

Ser vi på realiteten, og ikke på de juridiske formalitetene, kan vi godt si at vi *har hatt* vegprising i Norge, nemlig på bomringene i Trondheim og Stavanger. Men det var knapt noen som visste at det var det de hadde, og når det gjelder Stavanger, var det heller ingen som analyserte virkningene. Ordningen i Stavanger blei byttet ut med en høyere sats som var lik hele døgnet da det viste seg at de tidsdifferensierte satsene ikke innbrakte så mye som man hadde forutsatt.

De siste par åra har man i flere norske byer (Kristiansand, Drammensområdet, Trondheim) truffet intensjonsvedtak om køprising eller undertegnet avtaler med Samferdselsdepartementet som mer eller mindre forplikter til tilsvarende tiltak. Det er grunn til en viss skepsis til hva dette vil føre til. For det første kan en mistenke at den primære intensjonen har vært å få lokale vegprosjekter inn i den nasjonale transportplanen og samtidig sikre seg midler fra departementets belønningsordning for bedre kollektivtransport og mindre bilbruk. I så fall vil man trolig hoppe av når anledningen byr seg. For det andre tenker nok noen at dette kan gi anledning til å øke eksisterende bomsatser drastisk, gjerne til de samme satsene som i Stockholm. Slik skal den lokale bypakka finansieres. Utredninger i vegvesenets regi i Stavanger og Fredrikstad har brukt tilsvarende høye satser på det de kaller køprising. Men Fredrikstad er ikke Stockholm. Vegprising krever at avgiften står i samsvar med køforholdene. Hvis en riktig avgift hadde vært beregnet i disse byene, spørs det om det hadde vært verdt bryet å kreve den inn alle steder. Faren med denne tendensen er at man uthuler det prinsippet som må ligge til grunn for køprising, slik at det hele bare blir en bekvem måte å finansiere nye vegprosjekter på. Da er det FrP som har fått rett i sine verste mistanker.

La oss derfor prøve å klargjøre det prinsipielle grunnlaget for køprising på en begripelig måte.

5.4 Kø – en ekstern virkning

Når det kommer for mange biler inn på en veg, blir gjennomsnittsavstanden mellom bilene mindre. Det tvinger sjåførene til å redusere farten. Dermed oppstår det forsinkelser i forhold til om trafikken er liten. Dette vil skje selv om vegen er helt rett og like bred over alt. Kø ved flaskehalser kommer i tillegg. Et tredje fenomen når trafikken øker, er at trafikksystemet blir mer ustabilt. Reisetida på samme strekning fra dag til dag blir mer og mer uforutsigelig.

Bilkø er en av flere ulemper ved å bo, jobbe eller drive næringsvirksomhet i en storby. Men ulempene motsvares av fordeler som et større arbeidsmarked, kulturtilbud, stordriftsfordeler for bedrifter, mulighet til samlokalisering osv. Siden ulempene til en viss grad er prisen man må betale for å få fordelene, vil det aldri være mulig helt å eliminere bilkøene i en storby. En by helt uten køer vil være en by som ikke er i stand til å utnytte sine fordeler og muligheter. Noen storby uten køer og trengsel finnes da heller ikke noe sted.

Men vi kan redusere køene til et samfunnsøkonomisk fornuftig nivå. Siden reisetida øker med trafikkmengden, vil hver ny bil føre til at *alle* kommer litt seinere fram. Men vi kan ikke gi skylda for køene til de siste som bestemmer seg for å reise. Alle kunne jo i prinsippet avlyse sin reise, og dermed bidra til at de andre kom fortere fram. Og ingen av dem har noen mulighet til å ta hensyn til det tidstapet de påfører de andre – de vil ta sine beslutninger på grunnlag av den reisetida de opplever sjøl. Det betyr at alle bilistene påfører alle de andre en ekstern (tids)kostnad. Økonomisk teori tilsier da at vi får den beste samfunnsøkonomiske løsningen ved å skrive ut en avgift lik den eksterne kostnaden som deres handlinger påfører de andre, slik at de har alle samfunnets kostnader for øye når de bestemmer seg for hva de skal gjøre. Dette er prinsippet bak miljøavgifter, og det er like gyldig når det gjelder kø.

Leg merke til at dette argumentet er helt uavhengig av hvilke andre tiltak vi gjør i transportsystemet. Det betyr at uansett hva vi ellers gjør, kan vi alltid gjøre det bedre ved også å få på plass riktige priser. Men hva annet vi gjør, bestemmer jo hvor mye kø vi har i utgangspunktet, og dermed hvor høy avgifta behøver å være.

5.5 Samfunnsøkonomisk beste løsning

De økonomiske teoriene som vi anvender til å beregne optimal avgift og samfunnsøkonomisk lønnsomhet av køprising, er konsumentteori og velferdsteori. Disse teoriene har jo fått seg noen trøkker i det siste, men de funker: Etterspørselsendringene ved køprising blei ganske nøyaktig beregnet på forhånd både i London og Stockholm, og den positive velferdsvirkningen motsvares av økt oppslutning i praksis. Vi kan regne og regne på forhånd, men at folk opplever en ordning som de sjøl har betalt for, som totalt sett en forbedring, er sjølsagt den beste prøven på at det faktisk har skjedd en samfunnsøkonomisk forbedring. Det er nok det som er årsaka til den dype tilfredsstillelsen som transportøkonomene føler om dagen.

For å gjøre beregninger av optimal køavgift trenger vi en transportmodell som i det minste skiller mellom etterspørselen i rushtida og etterspørselen resten av dagen. En slik modell har vi i Norge bare for Osloområdet for øyeblikket. Den er svært lik modellen som blei brukt i Stockholm. På Transportøkonomisk institutt har vi i flere omganger beregnet optimal avgift på nåværende bomring i Oslo, og alle resultater tilsier at tiltross for forskjellene i beliggenheten av bomringen, befolkningen innafor og utafor ringen osv., skal avgiften være omtrent som i Stockholm, dvs. rundt 40 kroner i maksimal rushtid ved innkreving bare én veg. På laust grunnlag kan vi da formode at optimal avgift i andre norske byer skal være lavere – kanskje betydelig lavere.

5.6 Fordelingsproblemene

Vi må skille mellom fordelingsvirkningene før og etter at avgiftsinntektene er ført tilbake til lokalsamfunnet. La oss først se bort fra bruken av pengene og konsentrere oss om trafikkvirkningen av avgiften. Undersøkelser fra en mengde byer viser at menn er sterkt overrepresentert blant de som kjører bil i byen i rushtida, og høyinntektsgruppene er likeledes sterkt overrepresentert. Det er altså et stort innslag av menn med god inntekt blant de som må betale avgifta og får oppleve tidsbesparelsen. En spørreundersøkelse fra Oslo og Akershus viser forøvrig at kun tre prosent av dem som bruker bil til å levere barn i barnehagen, er avhengig av å krysse bomringen.

De som kjører bil i rushtida vil dele seg i to: De som synes tidsgevinsten mer enn oppveier kostnaden, og de som mener det motsatte. Det er særlig næringstrafikken (gods- og tjenestereiser), men kanskje også folk med særlig høy timelønn, som vil mene at de vinner på ordningen. De fleste trafikantene vil imidlertid regne seg til gruppen som mener kostnaden overstiger tidsgevinsten. Fordi alternativene er enda verre i deres øyne, fortsetter de likevel å kjøre. En tredje gruppe er de som kjørte bil i rushtiden før avgiften, men skifter til noe annet når avgiften blir innført. De opplever et nyttetap fordi det alternativet de syntes var best i utgangspunktet, nå er tatt vekk. Det er gruppe 3 som gjør at køprising virker. Jo bedre nestbestealternativ denne gruppa har, jo mindre vil den tape, og jo flere vil det være som slutter seg til denne gruppa. Det er derfor kollektivtiltak gjør køprisingen mer effektiv. Andre tiltak som øker folks valgfrihet, som mer bruk av fleksitid, vil ha samme effekt.

Bilistene som helhet vil tape på køprising før man tar bruken av pengene i betraktning, men alle taper ikke like mye, og noen vinner. Selv om høyinntektsgruppen har det høyeste nyttetapet målt i kroner, er det ikke sikkert at de taper mest i forhold til inntekten. Om vi skal konkludere med at det er de rike eller de fattigste som rammes hardest, kan altså komme an på om vi vil legge vekt på absolutte eller relative forskjeller.

Men alt dette er gruppebetraktninger. Det hjelper jo ikke den enkelte med lav inntekt som ikke har noe alternativ til bilen at han hører til en liten minoritet. Derfor er det all grunn til å ta problemene til enkelte særlig uheldige grupper på alvor ved utformingen av ordningen og ved bruken av avgiftsinntektene. Når avgiftsinntektene brukes fornuftig, vil trafikantgruppa som helhet få en gevinst, og fordelingsprofilen på tiltaket kan rettes opp, om ønskelig.

5.7 Implementering

For hver by i verden som har innført køprising, finns det ti som har vært på nippet til å gjøre det, men som er blitt stoppet av folkeavstemninger, politisk strid eller problemer med den tekniske løsningen.

Siden trafikantene som gruppe vil tape på køprising før vi tar hensyn til hvordan avgiftsinntektene brukes, er det essensielt å øremerke inntektene til bruk lokalt. Det kan også være svært viktig å være lydhør for alle innvendinger og prøve å finne løsninger på dem på forhånd, i form av rabattordninger og fritak, justeringer av bomringens beliggenhet osv. På en eller annen måte må man også sikre at det er troverdig at ikke ordningen vil bli misbrukt ved at man øker satsene når det oppstår et nytt finansieringsbehov. Det betyr omfattende informasjon på forhånd om hensikten og prinsippet, og et troverdig program for å måle effektene og beregne de marginale eksterne kostnadene, slik at en kan vise at satsene tilsvarer hensikten. Køprising er ikke noe man bør innføre på innskytelsen. Det kreves gode analyser på forhånd, masse informasjon og et omfattende oppfølgingsprogram, som i Stockholm. Det er heller ikke noe man bør innføre på spinkelt politisk grunnlag. I de fleste tilfellene bør en ha en solid politisk koalisjon.

Å innføre en forsøksordning, med politisk vedtak eller folkeavstemning i etterkant, som i Stockholm, virker fornuftig.

I norsk lovgiving skal inntektene brukes i det lokale transportsystemet. Jeg har tatt til orde for en litt friere bruk av midlene, slik at man for eksempel kan kompensere grupper som kommer spesielt dårlig ut.

Når det gjelder den tekniske løsningen, er det grunn til å merke seg at både Singapore (som var den første byen i verden som innførte køprising), London og Stockholm satset på enkel teknologi til å begynne med, og innfører mer avanserte systemer etter hvert. Den samme utviklingen ser vi på de norske bomringene. Systemer med barnesjukdommer vil ikke akkurat øke oppslutningen i den kritiske fasen – da får en heller akseptere litt høye innkrevingskostnader for en stund.

Litteratur

Akçelik, R. (1991). Travel time functions for transport planning purposes: Davidson's function, its time-dependent form and an alternative travel time function. *Australian Road Research* **21** (3), pp. 49–59.

Blakstad, F.(1993) Kompendium i trafikkteknikk. Tapir forlag.

Boyce, D.E. (2007) Forecasting Travel on Congested Urban Transportation Networks: Review and Prospects for Network Equilibrium Models. *Networks and Spatial Economics* **7**(2), 99-128.

Boyce, D.E.., H.S. Mahmassani and A. Nagurney (2005) A retrospective on Beckmann, McGuire and Winsten's Studies in the Economics of Transportation. *Papers in Regional Science* **84**(1), 85-103.

Bureau of Public Roads (1964) Traffic Assignment Manual. U.S. Dept. of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C.

Minken, H. (2005) Vegprising, kollektivtiltak og sosial ulikhet. TØI-rapport 815/2005.

Minken, H. og H. Samstad (2006) Virkningsberegning av tiltak for raskere og mer pålitelig godstransport – en ny metode. TØI-rapport 825/2006.

Ravindran, A., D.T. Phillips and J.J. Solberg (1987) Operations Research: Principles and Practice. John Wiley & Sons, New York.

Spiess, H. (1990) Conical Volume-Delay Functions. *Transportation Science* **24**(2). Også tilgjengelig på nett : http://emme2.spiess.ch/conic/conic.html

Sydsæter, K. (1990) Matematisk analyse Bind II. Universitetsforlaget.

Yang, H. og H.-J. Huang (1998): Principle of marginal cost pricing: How does it work in a general road network? *Transportation Research* **32**(1), 45-54.

Aas, H., H. Minken og H. Samstad (2009) Myter og fakta om køprising. TØI-rapport 1010/2009.

VEDLEGG 1

Kuhn-Tuckersetningen med ikke-negative variable

Her skal vi utdype noen hovedpunkter i avsnitt 4.14 i Sydsæter (1990), inkludert hovedresultatet i avsnittet, teorem 4.25.

Utgangpunktet er problemet

$$(.32)\quad \underset{x_1,\dots,x_n}{Maksimer}\ f\left(x_1,\dots,x_n\right)\ \text{ gitt } \begin{cases} g_1\left(x_1\dots,x_n\right)\le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m\left(x_1\dots,x_n\right)\le b_m \end{cases},\ \text{og } x_i\ge 0 \text{ for } i=1,\dots,n$$

I alle punkter i mulighetsrommet, dvs. alle punkter med ikke-negative koordinater som tilfredsstiller bibetingelsene, finnes det noe som kalles føringsbetingelsen, som enten kan være oppfylt i punktet eller ikke. Punkter hvor føringsbetingelsen *ikke* er oppfylt, kan være kandidater til å løse problemer, dvs. de kan være maksimumspunktet. Men normalt vil føringsbetingelsen være oppfylt overalt i problemene vi har å gjøre med. Vi skal derfor nå (i motsetning til Sydsæter) rett og slett anta at den er oppfylt. Til slutt i vedlegget skal vi si noe mer om hva føringsbetingelsen går ut på.

Med føringsbetingelsen ryddet av vegen kan vi gå rett på teorem 4.25, Kuhn-Tuckerteoremet i tilfellet med ikke-negative variable. Vi vil forutsette at funksjonene f og $g_1, \dots, g_m$ er kontinuerlige og minst en gang deriverbare. Da sier teoremet at de nødvendige betingelsene for at et punkt $\mathbf{x}^0=\left(x_1^0,\dots,x_n^0\right)$ skal kunne løse problemet, er at det finnes entydig bestemte tall $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ slik at for $i = 1, \dots, n$ gjelder

$$(.33)\qquad \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x_i}\le 0\ \left(=0 \text{ for } x_i^0>0\right)$$

og for $j = 1, \dots, m$ gjelder

$$(.34)\qquad \lambda_j\ge 0\ \left(=0 \text{ for } g_j\left(\mathbf{x}_0\right)<b_j\right)$$

(A2) sier at den deriverte av Lagrangefunksjonen mhp x_i skal være mindre eller lik 0, men lik null dersom $x_i^0>0$. (A3) sier at Lagrangeparametrene skal være større eller lik null, men lik null dersom vedkommende bibetingelse ikke er bindende.

Det er viktig for fortegnet på Lagrangeparameterne at maksimeringsproblemet blir formulert nøyaktig på den måten som (A1) sier, som et maksimeringsproblem der bibetingelsene er ulikheter som "vender mot venstre".

Den systematiske måten å bruke teoremet på er som følger:

Undersøk alle mulige kombinasjoner av bindende og ikke-bindende bibetingelser. Om det for eksempel er tre bibetingelser, undersøk først tilfellet der alle er bindende, deretter tilfellet der nr 1 og 2 er bindende, tilfellet der nr 1og 3 er bindende og tilfellet der nr 2 og 3 er bindende. Deretter undersøkes tilfellet der bare 1 er bindende, bare 2 er bindende og bare 3 er bindende. Til slutt undersøkes tilfellet der ingen bibetingelser er bindende. Totalt gir det 8 tilfeller å undersøke. Generelt vil m bibetingelser gi 2^m tilfeller å undersøke.

La oss si at vi nå studerer et av disse tilfellene. Det er n x-er og m λ-er som skal finnes i hvert tilfelle, og vi har n Kuhn-Tuckerbetingelser og m bibetingelser til å finne dem. Det første vi merker oss er at Lagrangeparameteren til de ikke-bindende bibetingelsene må være null. Dermed forsvinner et antall betingelser sammen med et like stort antall ukjente, slik at systemet fremdeles i prinsippet burde være løsbart. Men Kuhn-Tuckerbetingelsene er jo ikke nødvendigvis likninger. Vi kan forutsette at de er det – da vil den tilsvarende x_i-en være en ukjent, men vi har også en likning til, sli at vi fremdeles har en likning for hver ukjent. Uansett hva vi forutsetter, skulle det altså være like mange likninger som ukjente, slik at variablene kan beregnes.

For hvert tilfelle vi undersøker, går vi nå i gang med å løse for variablene. Ofte kommer vi til et punkt hvor vi må gjøre en forutsetning om at en eller flere av Kuhn-Tuckerbetingelse er bindende. Da må vi også undersøke den motsatte forutsetningen. I prinsippet må vi altså undersøke alle de undertilfellene som oppstår fordi vi kan forutsette at enhver variabel x_i er null eller større enn null.

Det vi spesielt ser etter i hvert tilfelle, er motsigelse. Motsigelser kan vise seg ved at en variabel blir beregnet til å være mindre enn null, eller at vi får fram to mot-stridende uttrykk for variablen, eller to betingelser som motsier hverandre. Da veit vi at dette tilfellet ikke kan være en løsningskandidat.

Kanskje vil det være noen variable x_i som helt sikkert ikke er null. Da veit vi at den tilsvarende Kuhn-Tuckerbetingelsen (A.2) er en likning.

Til slutt står vi igjen med noen tilfeller der det ikke finnes motsigelser. Det er våre løsningskandidater. Det er ikke sikkert at vi kan finne eksplisitte uttrykk for hver av variablene i disse tilfellene, men vi veit i alle fall at vi har like mange likninger som ukjente, og at likningene ikke motsier hverandre.

Vi anbefaler at man ikke nøyer seg med dette. For hver løsningskandidat finnes det også en del ulikheter som en kan arbeide videre med. Det er de bibetingelsene som ikke er bindende (de gir opphav til ekte ulikheter), og de Lagrangevariablene som ikke er null (de gir opphav til ulikheter av typen ”større eller lik”). Av disse tingene kan en noen ganger (ganske ofte) utlede vilkårene som parametrene må oppfylle for at denne løsningskandidaten faktisk løser problemet. Om man sammenlikner disse vilkårene for de ulike tilfellene, kan det vise seg at ett av tilfellene er løsningen når parametrene i problemet har en viss størrelse, mens en annen kandidat blir eneste løsningen om parametrene har andre verdier. Til sammen kan dette vise seg å gi en uttømmende oppskrift på hvilke tilfeller som er løsningen for alle mulige parameterverdier. Om vi lykkes med dette, kan vi ganske enkelt finne den entydige løsningen, og vi kan programmere den i EXCEL, for eksempel. Et eksempel er modellen i vedlegg 2 i Minken og Samstad (2006).

Føringsbetingelsen

Anta at $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ løser problemet. Vilkåret for at betingelsene (A2) og (A3) da må være innfridd med nødvendighet, er at den såkalte *føringsbetingelsen* gjelder i dette punktet. Den sier at gradientene til de av de $m + n$ funksjonene $g_1, ..., g_m$ og $-x_1, ..., -x_n$ som er aktive i punktet $\mathbf{x}^0$, skal være lineært uavhengige i dette punktet.

At funksjonene $g_1, ..., g_m$ (eller en delmengde av dem) er aktive, betyr at bibetingelsen som de inngår i, er bindende. At funksjonene $-x_1, ..., -x_n$ (eller noen av dem) er aktive, betyr at de er null i punktet $\mathbf{x}^0$. Gradienten til funksjonen g_j er vektoren av de partiellderiverte til g_j. At disse vektorene er lineært uavhengige, betyr ingen av dem kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de øvrige.

Metoden for å finne ut om gradientene er lineært uavhengige eller ikke, skal vi ikke gå inn på her. Men vi må nevne at alle punkter der føringsbetingelsen svikter, er løsningskandidater. For at (A2) og (A3) skal være *nødvendige* betingelser for at punktet $\mathbf{x}^0$ gir løsningen, må derfor føringsbetingelsen være innfridd i $\mathbf{x}^0$.

Vi må også nevne at noen av bibetingelsene i (A1) godt kan være likheter. Men da vil vi ikke kunne være sikre på at den tilhørende Lagrangeparameteren er positiv. I stedet for en likhet anbefaler Sydsæter i et slikt tilfelle å formulere problemet med to ulikheter som vender hver sin veg. Så vidt vi kan skjønne, er den eneste hensikten med det å kunne undersøke om føringsbetingelsen gjelder. Om vi tar det for gitt, klarer vi oss med en likhet.

VEDLEGG 2

Oppgaver

Oppgave 1

Hvorfor må etterspørselskurva i et bilreisemarked nødvendigvis være aggregert?

Oppgave 2

Litt terminologi: Trafikk dreier seg om kjøretøyer, transport om det som er inni kjøretøyet. Videre skiller vi mellom mengde og arbeid både for trafikk og transport. For eksempel:

Persontrafikk = antall personkjøretøyer i virksomhet (kjøretøy)

Persontrafikkarbeid = persontrafikk x gjennomsnittlig utkjørt distanse (kjøretøykm)

Persontransport = antall reisende personer

Persontransportarbeid =personkm, passasjerkm

Godstrafikk = antall godskjøretøyer

Godstrafikkarbeid =kjøretøykm for godsbiler

Godstransport = antall transporterte tonn

Godstransportarbeid = tonnkilometer

Alle disse målene er strømningsmål, altså trafikk eller transport eller trafikkarbeid eller transportarbeid per tidsenhet.

Statistikk: Den viktigste kilden til statistikk om trafikk og transport i Norge er en årlig TØI-publikasjon, den siste er TØI-rapport 1277/2013.

Spørsmålet er: *Ved hvilket trafikkvolum er trafikkarbeidet på en veglenke størst?*

Tips: Mål trafikkarbeidet per kjøretøy ved hastigheten v. Kall trafikkmengden y. Maksimer vy/c. Bruk likning (14), høvelig omformulert, med minustegn for å holde oss til den nedre delen av volume-delaykurva.

Oppgave 3

Vegavgifta B er en overføring fra bilistene til det offentlige. Hvorfor opptrer da B som inntekt for det offentlige men ikke som utgift for bilistene i uttrykket W = UB + Bx som vi maksimerer? Er dette ikke annet enn et triks for å flå bilistene?

Oppgave 4

Beregn optimal avgift og samfunnsnytte når etterspørselsfunksjonen er $x = D(G) = x_0 e^{-\gamma G}$ og køfunksjonen er $S(x) = a + bx$.

Oppgave 5

Hvordan påvirker det optimal vegavgift at skattekroner er dyre, dvs. at samfunns-økonomisk sett har provenyet *Bx* verdien (1 + λ)*Bx* for det offentlige, der λ er den såkalte skattefaktoren?

Oppgave 6

Løs problemet

$$\underset{x}{Maks}\ f(x) = a^2x^2 - 3bx - c \ \text{ gitt } 4ax \leq b \ \text{ og } \ x \geq 0$$

Finn ut hva størrelsesforholdet mellom parametrene må være for at optimum inntreffer når bibetingelsen er bindende, og når optimum inntreffer når bibetingelsen ikke er bindende.

Oppgave 7

Anta $\frac{\partial x}{\partial G} = -\gamma x$ (etterspørselen x har konstant elastisitet). Løs problemet

$$\underset{G}{Maks}\, W = \frac{1}{\gamma} x(G) + Bx(G) \ \text{ gitt } a + bx(G) - B = G$$

Tolk resultatet.

Oppgave 8

Dette maksimeringsproblemet gir en transportmodell (et system av etterspørsels-funksjoner) som kalles entropimaksimering. Finn etterspørselsfunksjonene. Vi kan gå ut fra at $z \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

$$\underset{x_1, x_2, z}{Maks}\, U\left(x_1, x_2, z\right) = z + \sum_{i=1}^{2} a_i x_i - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{2} x_i \left(\ln x_i - 1\right)$$

gitt

$$z + \sum_{i=1}^{2} p_i x_i \leq R \qquad (\lambda)$$

$$\sum_{i=1}^{2} t_i x_i \leq T \qquad (\mu)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \leq N \qquad (\eta)$$

Gi en tolkning av modellen.

Oppgave 9

Finn

$$U\left(z, \mathbf{x}\right) = z + \sum a_i x_i - \frac{1}{b} \sum x_i \left(\ln x_i - 1\right)$$

når

$$x_i = N \frac{e^{b\left(a_i - p_i - \mu t_i\right)}}{\sum e^{b\left(a_j - p_j - \mu t_j\right)}} \text{ og } z = R - \sum p_i x_i$$

Transportøkonomisk institutt (TØI)
Stiftelsen Norsk senter for samferdselsforskning

TØI er et anvendt forskningsinstitutt, som mottar basisbevilgning fra Norges forskningsråd og gjennomfører forsknings- og utredningsoppdrag for næringsliv og offentlige etater. TØI ble opprettet i 1964 og er organisert som uavhengig stiftelse.

TØI utvikler og formidler kunnskap om samferdsel med vitenskapelig kvalitet og praktisk anvendelse. Instituttet har et tverrfaglig miljø med rundt 70 høyt spesialiserte forskere.

Instituttet utgir tidsskriftet Samferdsel med 10 nummer i året og driver også forskningsformidling gjennom TØI-rapporter, artikler i vitenskapelige tidsskrifter, samt innlegg og intervjuer i media. TØI-rapportene er gratis tilgjengelige på instituttets hjemmeside www.toi.no.

TØI er partner i CIENS Forskningssenter for miljø og samfunn, lokalisert i Forskningsparken nær Universitetet i Oslo (se www.ciens.no). Instituttet deltar aktivt i internasjonalt forskningssamarbeid, med særlig vekt på EUs rammeprogrammer.

TØI dekker alle transportmidler og temaområder innen samferdsel, inkludert trafikksikkerhet, kollektivtransport, klima og miljø, reiseliv, reisevaner og reiseetterspørsel, arealplanlegging, offentlige beslutningsprosesser, næringslivets transporter og generell transportøkonomi.

Transportøkonomisk institutt krever opphavsrett til egne arbeider og legger vekt på å opptre uavhengig av oppdragsgiverne i alle faglige analyser og vurderinger.

Besøks- og postadresse:
Transportøkonomisk institutt
Gaustadalléen 21
NO-0349 Oslo

22 57 38 00
toi@toi.no
www.toi.no